

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВСП «БЕРДЯНСЬКИЙ КОЛЕДЖ ТАВРІЙСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО
АГРОТЕХНОЛОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ»**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни «Алгебра і початки аналізу»
для студентів ВНЗ I-II рівнів акредитації**

Конкурс «Педагогічні інновації»

*Номінація: сучасний навчальний
посібник*

2015

Укладач: Попівща Надія Олександрівна – викладач загальноосвітніх дисциплін, спеціаліст вищої категорії

Рецензент: Бовбас Олександр Юрійович – викладач фізики і математики, методист коледжу

Посібник містить теоретичний і практичний матеріал з дисципліни «Алгебра і початки аналізу». У роботі наведені означення, формули, графіки, таблиці з усіх тем дисципліни, а також приклади розв’язування завдань до кожної теми.

Запропонований матеріал рекомендований для повторення, самостійного вивчення матеріалу, для практичної роботи студентів, для підготовки до заліків, державної підсумкової атестації, а також до ЗНО. Даний матеріал може бути використаний студентами ВНЗ I-II рівнів акредитації всіх спеціальностей. Отже, студент може швидко знайти необхідну інформацію, тобто одержати необхідні знання. Матеріал може бути використаний викладачами фізики, біології, хімії та спецдисциплін всіх спеціальностей.

Рекомендовано цикловою комісією загальноосвітніх дисциплін.
Протокол №8 від 25 березня 2015р.

Зміст

Вступ	4
РОЗДІЛ 1. Множини та числа	
1.1. Множини та операції над ними	7
1.2. Цілі числа	9
1.3. Дійсні числа	12
1.4. Властивості коренів	14
1.5. Степінь з натуральним показником	15
РОЗДІЛ 2. Логарифми та їх властивості	
2.1. Основні властивості логарифмів	17
2.2. Десяткові і натуральні логарифми	18
РОЗДІЛ 3. Алгебраїчні вирази	
3.1. Одночлени і многочлени	19
3.2. Формули скороченого множення	21
3.3. Квадратний тричлен	22
3.4. Алгебраїчні вирази	24
РОЗДІЛ 4. Функції та графіки	
4.1. Поняття функцій	27
4.2. Способи задання функції	28
4.3. Функції та їх властивості	30
4.4. Властивості деяких функцій та їх графіки	33
4.5. Перетворення графіків функцій	42
РОЗДІЛ 5. Тригонометрія	
5.1. Означення та властивості тригонометричних функцій	45
5.2. Основні тригонометричні формули	48
5.3. Обернені тригонометричні формули	51
5.4. Властивості тригонометричних і обернених тригонометричних функцій. Графіки цих функцій	53

РОЗДІЛ 6. Рівняння і системи рівнянь

6.1. Рівняння з однією змінною, корені рівняння	58
6.2. Схеми розв'язків рівнянь та їх означення	59
6.3. Системи рівнянь. Методи розв'язання рівнянь	61
6.4. Рівняння з двома змінними, його розв'язки та графіки	73
6.5. Системи рівнянь з двома змінними	76
6.6. Можливі методи розв'язування системи рівнянь з двома змінними	78

РОЗДІЛ 7. Нерівності та системи нерівностей

7.1. Нерівності та системи нерівностей з однією змінною та їх розв'язки	82
7.2. Розв'язки і графіки нерівностей з двома змінними	99
7.3. Числові послідовності	102
7.4. Арифметична прогресія	103
7.5. Геометрична прогресія	104
7.6. Границя функції	105
7.7. Неперервні функції	106
7.8. Обчислення границі функції в точці	108
7.9. Похідна. Означення похідної	108
7.10. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних	110
7.11. Геометричний і механічний зміст похідної	111
7.12. Застосування похідної при дослідженні функції і побудові графіків функцій	112
7.13. Необхідна умова екстремуму	114
7.14. Схеми дослідження функції на монотонність і екстремуми	114
7.15. Схема знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на проміжку	116
7.16. Схеми дослідження функції. Побудова графіка функції	116
7.17. Первісна, невизначений інтеграл	118
7.18. Визначений інтеграл та його застосування	120

РОЗДІЛ 8. Комбінаторика, метод математичної індукції, елементи теорії ймовірності і статистики	
8.1. Елементи комбінаторики і метод математичної індукції	123
8.2. Початки теорії ймовірностей	126
8.3. Елементи статистики	129
Додаток 1	133
Список літератури	136

Вступ

Роль математики в сучасному світі, у практичній діяльності людини настільки велика, що наш час називають «епохою математичних знань», а відомий датський фізик Нільс Бор говорив, що математика є чимось значно більшим, ніж наука, оскільки вона є мовою науки. Особливо значуща роль математики в природознавстві і техніці. Математичний стиль мислення, уміння послідовно і лаконічно робити висновки і прогнози потрібні працівникам будь-яких професій.

Математизація – характерна риса будь-якої сучасної галузі знань. Особливо значуща роль математики в природознавстві і техніці. Математика – фундаментальна наука, яка надає загальні мовні засоби іншим наукам, тим самим вона виявляє їх структурний взаємозв'язок і сприяє знаходженню загальних законів природи. В світлі структурно-логічних схем математика тісно пов'язана з усіма дисциплінами для всіх спеціальностей коледжу.

Роль математичної освіти у професійній підготовці дуже велика. Процеси, які відбуваються на даний момент в усіх сферах життя суспільства, висувають нові вимоги до професійних якостей фахівців. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується якісною зміною діяльності персоналу, який пов'язаний з широким застосуванням математичного апарату.

Говорячи про значення математики в блоці загальноосвітніх дисциплін ми бачимо, що математика опирається на писемність і вміння записувати числа на заняттях з української мови, літератури, іноземної мови – правильність написання дат народження, днів народження, визначення кількості прожитих років або скільки років тому був написаний вірш, чи твір. В історії багато різноманітних дат (війни, революції, кількість військових, військової техніки, тощо), які потребують чисельної уяви.

При вивченні астрономії студенти вчаться розрахувати абстрактні кількості, такі як час і дні, сезони, роки. Навчаються розраховувати космічні швидкості, періоди обертання космічного апарата навколо Землі, відстані від Землі до зорі, тощо.

Історичне значення математики полягає в тому, що вона служила і служить людині, що вона тісно пов'язана з іншими науками і професіями, знаходить порядок у хаосі, що нас оточує. Велич людини в її здібності мислити.

Сьогодні, як ніколи, стоїть гостро потреба у підготовці грамотних, висококваліфікованих робітничих кадрів. Умови ринкової економіки ставлять перед кожним з нас досить жорсткі вимоги. Баласт нікому не потрібен.

І як сказав академік Соболев: «Де б не були, в якій би галузі не працювали, який би предмет не вивчали - скрізь потрібні знання з математики».

Роль математичної освіти у професійній підготовці дуже велика. Процеси, які відбуваються на даний момент в усіх сферах життя суспільства, висувають нові вимоги до професійних якостей фахівців. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується якісною зміною діяльності персоналу, який пов'язаний з широким застосуванням математичного апарату. У коледжі студент повинен добре володіти базовими знаннями з математики. Дисципліна «Алгебра і початки аналізу», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки вивчається на першому та другому курсах коледжу. Значна увага приділяється перетворенням виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей та їх систем, розгляду властивостей функцій. Поряд із розв'язуванням знайомих задач, пов'язаних з многочленами, раціональними дробами, степенями і коренями, розглядаються функції та їх графіки, рівняння і нерівності. Похідні. Інтеграли.

Математичний аналіз - галузь математики, що відіграла значну роль у розвитку наук природничого характеру, бо з'явився потужний, достатньо універсальний метод дослідження функцій, які використовуються під час розв'язування різноманітних прикладних задач. В посібнику наведено теоретичний матеріал, довідкові таблиці, графіки, рисунки та приклади розв'язування завдань з кожної теми, що допоможе студенту розв'язуванню аналогічного завдання.

Запропонований посібник спрямований на реалізацію основних положень концепції профільного навчання, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Посібник підготовлено відповідно до чинної програми з алгебри і початків аналізу рівня стандарту.

Методична розробка має за мету допомогти студентам при вивченні матеріалу, повторенні та підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Систематизований матеріал може бути використаний для організації індивідуальної роботи зі студентами, при підготовці домашніх завдань, при підготовці конспектів тем які пропонуються для самостійного вивчення матеріалу а також для тих, хто цікавиться математикою.

Під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з посібником, використовуючи відповідні таблиці графіки та рисунки. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено.

За умови такої подачі навчального матеріалу де є компактно викладений матеріал та приклади розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє студенту, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а студент, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію.

Проте ми стикаємось з необхідністю повторення матеріалу при вивченні нового. Матеріал методичної роботи допоможе студенту швидко знайти необхідні дані для повторення при підготовці до тестових завдань, контрольних робіт, заліків, при підготовці до ДПА та зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Розділ 1. Множини та числа

1.1. Множини та операції над ними

Множини та їх елементи

Під множиною розуміють сукупність будь-яких предметів, об'єктів, об'єднаних між собою деякою загальною для них ознакою.

Предмети (об'єкти), з яких складається множина, називаються його елементами.

Для позначення множин використовують великі латинські літери A , B , C ,

для позначення елементів - малі - a , b , c .

Якщо елемент a є елементом множини A , то символічно записують так:

$a \in A$. Якщо елемент x не є елементом множини A , то символічно записують так: $x \notin A$.

Задання множин Множина, що має певну кількість елементів, називається скінченною. Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають нескінченною. Множина, що не має жодного елемента, називається порожньою і позначають символом $\emptyset$. Множину можна задати переліком його елементів; елементи множини записують у фігурних дужках. Наприклад, якщо A - множина дільників числа 15, то $A = \{1; 3; 5; 15\}$.

Підмножина

Якщо кожен елемент множини A міститься в множині B , то множину A називають підмножиною множини B і записують так: $A \subset B$ (рис. 1). Якщо одночасно $A \subset B$ і $B \subset A$, то говорять, що множини A і B рівні ($A = B$).

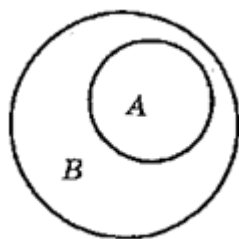
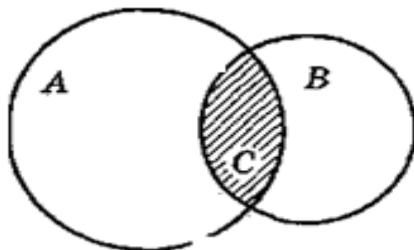


Рис.1

Перетин множин

Перетином множин A і B називають множину їх спільних елементів (рис. 2). Перетин множин A і B записують так: $A \cap B$. Якщо $C = A \cap B$ і $x \in C$, то це означає, що $x \in A$ і $x \in B$.



$$A \cap B$$

Рис.2

Об'єднання множин

Об'єднанням множин A і B називають множину елементів, які входять до складу принаймні однієї з цих двох множин (рис. 3). Об'єднання множин A і B символічно записують так: $A \cup B$. Якщо $C = A \cup B$ і $x \in C$, то це означає, що $x \in A$ або $x \in B$.

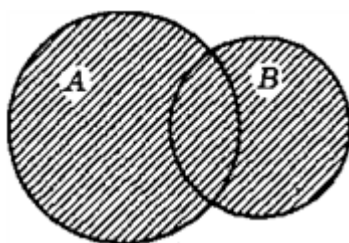


Рис.3

Різниця множин

Різницею множин A і B називають множину таких елементів, які входять до множини A , але не містяться в множині B (рис. 4). Різниця множин A і B записується так: $A \setminus B$. Якщо $C = A \setminus B$ і $x \in C$, то це означає, що $x \in A$ і $x \notin B$.

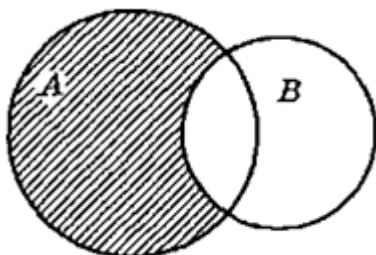


Рис.4

Закони операцій над множинами

Переставний закон: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$.

Закон порожньої множини: $\emptyset \cap A = \emptyset$ $\emptyset \cup A = A$

Закон поглинання: $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Сполучний закон: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Розподільний закон: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.2. Цілі числа

Натуральні числа

Числа 1; 2; 3; ..., які вживаються для лічби, називаються **натуральними**.
Множину натуральних чисел позначають символом **N**, тобто:
 $N = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots, n, \dots\}$.

Цілі числа.

Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль називаються цілими числами.

Множину цілих чисел $\{\dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ позначають символом **Z**.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n , більшим одиниці, називається добуток n множників, кожний з яких дорівнює a : $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, $n \in N$,

$n \geq 2$. Наприклад, $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $1^n = 1$, $n \in N$;
 $0^n = 0$, $n \in N$

Перший степінь числа a називають саме число: $a^1 = a$. У записі $a^n = b$ число a називають основою степеня, n показником степеня, b - значенням степеня.

Другий степінь числа a називають квадратом числа a , третій степінь числа a називають кубом числа a .

Степінь з цілим показником

Нульовий степінь числа, відмінного від нуля, дорівнює одиниці: $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Наприклад, $5^0 = 1$, $(-2)^0 = 1$. Нульовий степінь нуля (0^0) не визначається.

Степінь з цілим від'ємним показником визначається так: якщо $a \neq 0$ та $n \in N$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Вираз 0^{-n} , де $n \in N$, не визначається.

Наприклад, $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Властивості степенів з цілим показником

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m \in Z$, $n \in Z$.

Наприклад, $5^2 \cdot 5^{-5} = 5^{2-5} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ або } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

Наприклад, $3^{-3} : 3^{-5} = 3^{-3-(-5)} = 3^2 = 9$.

$$3. (a^m)^n = a^{mn}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $((-2)^5)^2 = (-2)^{10} = 1024$.

$$4. (ab)^n = a^n b^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

$$6. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{1}\right)^5 = 2^5 = 32$.

$$7. a^{2k} > 0, a \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Наприклад, $5^2 = 25 > 0, (-3)^4 = 81 > 0$.

8. Якщо $a > 0$, то $a^{2k-1} > 0, k \in \mathbb{N}$; якщо $a < 0$, то $a^{2k-1} < 0, k \in \mathbb{N}$.

Наприклад, $2^3 = 8 > 0, (-2)^3 = -8 < 0$.

Стандартний вид числа.

Стандартним видом числа a називається його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, число $a = 125\,000$ в стандартному вигляді записується так:

$$a = 1,25 \cdot 10^5,$$

число $a = 0,000508$ в стандартному вигляді записується так: $a = 5,08 \cdot 10^{-4}$.

Раціональні числа

Раціональними числами називаються числа, які можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Множина раціональних чисел позначається символом $\mathbb{Q}$.

Будь-яке натуральне число, цілі числа, звичайні дробу, змішані числа, десяткові дробу є раціональними числами.

Наприклад, $5 = \frac{5}{1}; -3 = \frac{-3}{1}; 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}; 0 = \frac{0}{1}; 1,2 = \frac{12}{10}$ - раціональні числа.

Властивості раціональних чисел

1. Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.

2. Щоб записати раціональне число у вигляді десяткового дробу, треба чисельник поділити на знаменник.
3. Будь-який нескінченний періодичний десятковий дріб або скінченний десятковий дріб можна представити у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробу, чисельником якого є період, а знаменником - цифра 9, записана стільки разів, скільки цифр у періоді.

Наприклад, $0,(5) = \frac{5}{9}$; $0,(428571) = \frac{428\,571}{999\,999} = \frac{3}{7}$

5. Щоб перетворити змішаний нескінченний періодичний десятковий дріб в звичайний дріб, треба: з числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду, і записати цю різницю в чисельник, а в знаменнику написати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді, і після дев'яток дописати стільки нулів, скільки цифр між комою і першим періодом.

Наприклад, $0,11(7) = \frac{117-11}{900} = \frac{106}{900} = \frac{53}{450}$

6. Сума, різниця, добуток, частка двох раціональних чисел є раціональним числом.

Ірраціональні числа

Ірраціональним числом називається число, яке не можна представити у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Наприклад, число π , дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра, $\pi = 3,1415926 \dots$ - ірраціональне число; довжина діагоналі d квадрата зі стороною, рівною 1, - ірраціональне число, $\sqrt{2} = d$ (рис. 5); ірраціональними також є числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$ та багато інших.

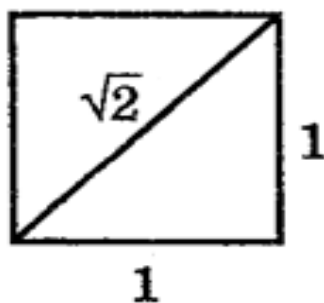


Рис.5

Властивості ірраціональних чисел

Будь-яке ірраціональне число можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Наприклад, $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$, $e = 2,7182818 \dots$

Сума, різниця, добуток, частка, раціонального та ірраціонального чисел - число ірраціональне.

Наприклад, числа $5 + \sqrt{3}$; $\sqrt{5} - 2$; $5\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$ - ірраціональні числа

Сума, різниця, добуток, частка двох ірраціональних чисел, а також результат піднесення ірраціонального числа до степеня можуть бути як раціональними, так і ірраціональними числами.

Наприклад, $(2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 2) = 4$; $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Порівняння ірраціональних чисел, виконання арифметичних дій над ними зводиться до порівняння і виконання дій над їх раціональними наближеннями.

1.3. Дійсні числа

Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел, які позначаються символом R .

Між множинами N , Z , Q та R існує співвідношення: $N \subset Z \subset Q \subset R$, тобто кожна з цих множин є підмножиною наступної множини (рис. 6).

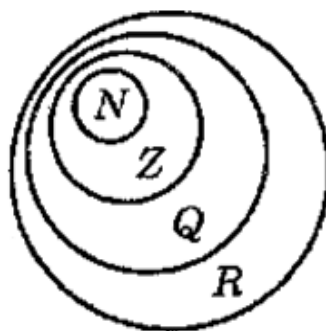


Рис.6

Будь-яке дійсне число можна записати у вигляді *нескінченного десяткового дробу*. Будь-який нескінченний десятковий дріб є записом деякого дійсного числа.

Числова пряма та дійсні числа

Числовою прямою називається пряма, на якій зазначено початок відліку (т. O), додатній напрямок (позначається стрілкою) і одиничний відрізок (OE). Точка O розбиває пряму на два променя: додатну півпряму і від'ємну півпряму. Кожному дійсному числу a відповідає єдина точка A числової прямої, і кожній точці A числової прямої відповідає єдине число a , що називається координатою точки A і позначається $A(a)$.

Наприклад, координатами точок А, В, С (рис. 7) є числа $-1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$, це записується так: $A(-1\frac{1}{2})$; $B(\frac{1}{2})$; $C(\sqrt{2})$.

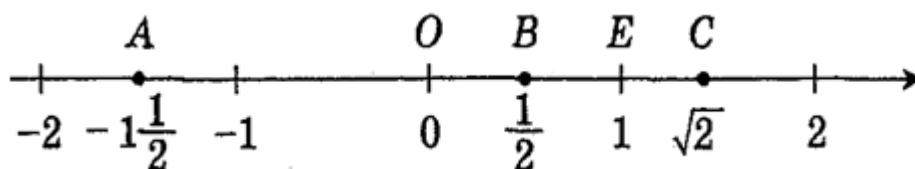


Рис.7

Модуль дійсного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0. \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація модуля

Якщо точка А має на числовій прямій координату a , то відстань (рис. 8) від А до О дорівнює $|a|$, $AO = |a|$.

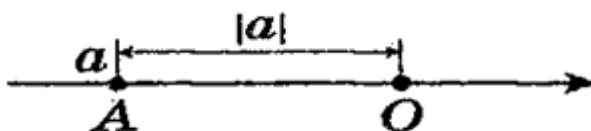


Рис.8

Ціла і дробова частини числа

Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число, яке не перевищує числа a ; позначається так: $[a]$.

Наприклад, $[2,1] = 2$; $[\sqrt{2}] = 1$; $[0,3] = 0$; $[-1,3] = -2$; $[-\sqrt{3}] = -2$.

Дробовою частиною числа a називається число, яке дорівнює $a - [a]$; позначається так: $\{a\}$, тобто $\{a\} = a - [a]$.

Наприклад, $\{2,1\} = 2,1 - 2 = 0,1$; $\{0,3\} = 0,3 - 0 = 0,3$;

Будь-яке число a можна представити у вигляді $a = [a] + \{a\}$.

Наприклад, $1,5 = 1 + 0,5$; $-1,5 = -2 + 0,5$.

Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) з невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число b , яке при піднесенні його до степеня n дає

число a . Число n називається показником кореня, число a – підкореневим виразом.

Позначення: $\sqrt[n]{a} = b$; цей запис означає: $b^n = a$, $a > 0$, $b > 0$.

Наприклад, $\sqrt[3]{8} = 2$, бо $2^3 = 8$ та $2 > 0$;

Коренем **непарного степеня** з від'ємного числа a називається таке від'ємне число b , яке при піднесенні його до непарного степеня дорівнює числу a .

Запис $\sqrt[2k+1]{a} = b$ означає: $b^{2k+1} = a$, $b < 0$, $k \in N$.

Наприклад, $\sqrt[3]{-27} = -3$, оскільки $(-3)^3 = -27$.

1.4. Властивості коренів

Основні тотожності

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $n \in N$, $n \geq 2$.
 2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a \geq 0$, $n \in N$, $m \in Z$, $k \in Z$, $n \geq 2$.
 3. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$
- Крім того, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $k \in N$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $n \in N$, $k \in N$, $a \geq 0$, $n \geq 2$, $k \geq 2$.
 5. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, $n \in N$, $k \in N$, $a \geq 0$, $n \geq 2$.
 6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.
 7. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$.

Винесення множника за знак кореня

$$\sqrt[2k]{b^{2k}a} = |b| \cdot \sqrt[2k]{a} = \begin{cases} b \cdot \sqrt[2k]{a}, & \text{якщо } b \geq 0 \\ -b \cdot \sqrt[2k]{a}, & b < 0, a > 0, k \in N. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a} = b \sqrt[2k+1]{a}, \quad k \in N.$$

$$\text{Наприклад, } \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}.$$

Внесення множника під знак кореня

$$b \sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b^{2k}a}, \quad \text{якщо } b \geq 0.$$

$$b \sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b^{2k}a}, \quad \text{якщо } b < 0, k \in N. \quad \sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a} = b \sqrt[2k+1]{a}, \quad k \in N.$$

$$\text{Наприклад, } 2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96}$$

Степінь з раціональним показником

Степенем показника $\frac{m}{n}$ ($m \in N, n \in Z, n \geq 2$) з додатного числа a

($m \in N, n \in Z, n \geq 2$) називається корінь n -го степеня з a^m , тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{де } a > 0.$$

Наприклад, $144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$; $16^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^3}} = \frac{1}{8}$

Вираз $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не має сенсу.

Властивості степеня з раціональним показником

Властивості степенів з цілими показниками вірні і для степенів з раціональними показниками:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}; \quad a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}; \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$$

$$(ab)^r = a^r b^r; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

1.5. Степінь з натуральним показником

Степенем числа **a** з натуральним показником **n**, більшим одиниці, називається добуток **n** множників, кожний з яких дорівнює **a**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз.}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Наприклад, $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $1^n = 1, n \in \mathbb{N}$;

Першим степенем числа **a** називається саме число: $a^1 = a$. У записі $a^n = b$ число **a** називають основою степеня, **n** - показником степеня, **b** - значенням степеня.

Другий степінь числа **a** називають квадратом числа **a**, третій степінь числа **a** називають кубом числа **a**.

Степінь з цілим показником

Нульовий степінь числа, відмінного від нуля, дорівнює одиниці: $a^0 = 1, a \neq 0$.

Наприклад: $5^0 = 1, (-2)^0 = 1$. Нульовий степінь нуля (**0**⁰) не визначається.

Степінь з цілим від'ємним показником визначається так: якщо $a \neq 0$ та $n \in \mathbb{N}$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Вираз **0**⁻ⁿ, де $n \in \mathbb{N}$, не визначається.

Наприклад: $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Властивості степенів з цілим показником

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, $5^7 \cdot 5^{-5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, або $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, $3^{-3} : 3^{-5} = 3^{-3-(-5)} = 3^2 = 9$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, $((-2)^5)^2 = (-2)^{10} = 1024$.

$$4. (ab)^n = a^n b^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

$$6. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{1}\right)^5 = 2^5 = 32$.

$$7. a^{2k} > 0, a \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Наприклад, $4^2 = 16 > 0, (-3)^4 = 81 > 0$.

$$8. \text{Якщо } a > 0, \text{ то } a^{2k-1} > 0, k \in \mathbb{N}; \text{ якщо } a < 0, \text{ то } a^{2k-1} < 0, k \in \mathbb{N}.$$

Наприклад, $2^3 = 8 > 0, (-2)^3 = -8 < 0$.

Розділ 2. Логарифми та їх властивості

Логарифмом додатного числа b ($b > 0$) за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести основу a , щоб отримати число b ; позначається так: $\log_a b$.

Наприклад, $\log_2 16 = 4$; $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$;

Формулу $a^{\log_a b} = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ називають *основною логарифмічною тотожністю*.

2.1. Основні властивості логарифмів

$$1. \log_a 1 = 0 \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

Наприклад, $\log_{\pi} 1 = 0$.

$$2. \log_a a = 1 \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

Наприклад, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$.

$$3. \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y > 0).$$

Наприклад, $\log_5 15 = \log_5 (3 \cdot 5) = \log_5 3 + \log_5 5 = \log_5 3 + 1$.

$$4. \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y > 0).$$

Наприклад, $\log_2 \left(\frac{3}{8}\right) = \log_2 3 - \log_2 8 = \log_2 3 - 3$.

$$5. \log_a x^p = p \log_a x \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0).$$

Наприклад, $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

6. Формула переходу від однієї основи логарифма до іншої:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad c \neq 1).$$

Наприклад, $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\frac{\log_3 2}{\log_3 8} = \log_8 2 = \frac{1}{3}$.

Наслідки:

$$1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1).$$

$$2) \log_a b = \log_{a^p} b^p \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0).$$

$$3) \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0).$$

$$4) \log_{a^q} a^p = \frac{p}{q} (a > 0, a \neq 1).$$

2.2. Десяткові і натуральні логарифми

Десятковими логарифмами називаються логарифми, основа яких дорівнює 10; позначаються символом **lg**: $\log_{10} b = \lg b$.

Наприклад, $\lg 1 = 0$; $\lg 100 = 2$; $\lg 0,1 = -1$.

Таблиця десяткових логарифмів деяких чисел

a	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg a \approx$	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95

Натуральні логарифми

Натуральними логарифмами називаються логарифми, основа яких дорівнює e ($e \approx 2,7182818$); позначаються символом **ln**: $\log_e b = \ln b$

Таблиця натуральних логарифмів деяких чисел

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$\ln a \approx$	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	4,61

Формули переходу від десяткового логарифму до натурального і навпаки

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343; \quad \lg x \approx 0,4343 \ln x;$$

$$\lg 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2,3026; \quad \lg x \approx 2,3026 \lg x.$$

Розділ 3. Алгебраїчні вирази

3.1. Одночлени і многочлени

Одночленом називається добуток чисел, змінних та їх натуральних степенів, а також самі числа, змінні і їх натуральні степені.

Наприклад, $5xy$; $6a^2b^2$; 4 ; a . — одночлени.

Одночлен стандартного виду - одночлен, який містить лише один числовий множник, який стоїть на першому місці, і степенів з різними основами.

Наприклад, $5a^3bc$; $13xyz^2$; -5 ; $-x$; a^2b . — одночлени стандартного виду.

Коефіцієнтом одночлена називається числовий множник одночлена стандартного виду.

Наприклад, коефіцієнтами одночленів $3a^2b$; $-8xy$; $-x^2y$; abc є відповідно числа 3 ; -8 ; -1 ; 1 . Коефіцієнти 1 і -1 в одночленах не прийнято писати.

Щоб записати одночлен в стандартному виді, треба перемножити всі його числові множники і отримане число поставити на перше місце, а потім добутки однакових буквених множників записати у вигляді степенів. Наприклад, $2xy \cdot 7axy \cdot (-3) a^2bx = -42a^3bx^3y^2$.

Степенем одночлена називається сума показників степенів усіх буквених множників, що входять до одночлена.

Наприклад, степінь одночлена $2x^2yz$ дорівнює 4 .

Якщо одночленом є число, відмінне від нуля, то його степінь вважається рівним нулю. Число 0 степеня не має.

Щоб помножити одночлен на одночлен, треба перемножити їх коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами.

Наприклад, $12a^2xy \cdot (-3xy^2z) = -36a^2x^2y^3z$.

Щоб піднести одночлен до степеня, треба піднести його коефіцієнт до цього степеня і помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого треба піднести одночлен.

Наприклад, $(-2x^2yz^6)^4 = 16x^8y^4z^{24}$.

Щоб поділити одночлен на одночлен, треба поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника, до знайденої частки приписати множниками кожну змінну діленого з показником, рівним різниці показників цієї змінної в діленому і дільнику.

Наприклад, $9x^7y^6z^5 : (3x^3y^5z) = \frac{9}{3}x^{7-3}y^{6-5}z^{5-1} = 3x^4yz^4$.

Многочлени і дії над ними

Многочленом називається алгебраїчна сума кількох одночленів.

Наприклад, $5x^2 - 2x + 3$; $7a^2b^2 - 5ab + xy$ — многочлени.

Одночлени, з яких складається многочлен, називаються його **членами**. Одночлен - окремий випадок многочлена. Многочлен, що містить два або три доданки, називається **двочленом** (біномом) і **тричленом** відповідно.

Наприклад, $a^2 - b^2$, $3a - 2$ — двочлени; $a^2 + ab + b^2$, $x^2 - 3x + 2$ — тричлени.

Подібні члени многочлена — це однакові одночлени або, якщо їх записати в стандартному виді, відрізняються тільки коефіцієнтами.

Наприклад, в многочлені $5x^2y + 6xy^2 - 7x^2y - 3xy^2$ перший і третій, другий і четвертий члени подібні.

Приведення подібних членів - це спрощення многочлена, при якому алгебраїч на сума подібних членів замінюється одним членом. Щоб привести подібні члени, треба скласти їх коефіцієнти і записати їх у загальну буквену частину.

Наприклад, $2ab + 3b^2 - 2a^2 + a^2 - 5ab + b^2 = 4b^2 - 3ab - a^2$.

Стандартний вид многочлена — це запис многочлена, в якому всі члени многочлена - одночлени стандартного виду і серед них немає подібних.

Наприклад, $x^3 - 2x^2 + 3$, $ab + bc + abc$ — многочлени стандартного виду, а $5x^2 + 3x - 6 + 2x^2$ — многочлен нестандартного виду.

Степенем многочлена стандартного виду називається найбільший зі степенів одночленів, з яких складається многочлен. Степенем довільного многочлена називається степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного виду.

Наприклад, степінь многочлена $2x^5y + 3xy^2$ дорівнює степеню одночлена $2x^5y$, тобто дорівнює 6.

Щоб *додати два многочлени*, досить з'єднати їх знаком «+» і привести подібні члени. При додаванні многочленів користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки можна опустити і зберегти знак кожного одночлена.

Наприклад, $(3x^2 - 2x + 5) + (5x^2 + 5x - 3) = 3x^2 - 2x + 5 + 5x^2 + 5x - 3 = 8x^2 + 3x + 2$.

Щоб *знайти різницю двох многочленів*, треба поставити знак «-» перед взятим в дужки другим многочленом. При відніманні многочленів теж користуються відповідним правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «-», то дужки можна опустити, змінивши знак кожного одночлена, що знаходився в дужках, на протилежний.

Наприклад, $(3x^2 - 2x + 5) - (6x^2 + 5x - 3) = 3x^2 - 2x + 5 - 6x^2 - 5x + 3 = -3x^2 - 7x + 8$.

Записати алгебраїчну суму многочленів у вигляді многочлена стандартного виду - розкрити дужки і привести подібні члени.

Наприклад, $(2x^2 - 3x + 2) - (3x^2 - 2x - 1) - x^2 + 2x + 1 + (-2x^2 + x - 1) = 2x^2 - 3x + 2 - 3x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 - 2x^2 + x - 1 =$

$$= -2x^2 - 2x + 1.$$

Щоб *помножити одночлен на многочлен*, треба кожен член многочлена помножити на цей одночлен і одержані одночлени скласти.

$$\text{Наприклад, } 2a(a^2 - a + 2a^2) = 2a^3 - 2a^2 + 4a^3 = 6a^3 - 2a^2.$$

Щоб *помножити многочлен на многочлен*, треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена і отримані одночлени скласти.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } (3x - 2)(2x - 3) &= 3x \cdot 2x - 3 \cdot 3x - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 = \\ &= 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 6x^2 - 13x + 6. \end{aligned}$$

Щоб *розділити многочлен на одночлен*, треба кожний член многочлена розділити на цей одночлен і отримані результати скласти.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } (5x^6 - 7x^4 + 3x^3 - 2x^2) : (2x) &= 5x^6 : (2x) - 7x^4 : (2x) + 3x^3 : \\ (2x) - 2x^2 : (2x) &= 2,5x^5 - 3,5x^3 + 1,5x^2 - x. \end{aligned}$$

Розкладанням многочлена на множники називається представлення цього многочлена у вигляді добутку многочленів. При розкладанні многочлена на множники використовують:

1) винесення спільного множника за дужки.

$$\text{Наприклад, } 5x^2 + 10x = 5x(x + 2);$$

2) спосіб згрупування.

Наприклад,

$$\begin{aligned} 5x - 5y - x^2 + xy &= (5x - 5y) - (x^2 - xy) = 5(x - y) - x(x - y) = \\ &= (x - y)(5 - x); \end{aligned}$$

3.2. Формули скороченого множення

1. Квадрат суми (різниці) двох виразів: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$$\text{Наприклад, } (a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9.$$

2. Куб суми (різниці) двох виразів: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

$$\text{Наприклад, } (a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

3. Добуток різниці двох виразів та їх суми: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Наприклад, $(a - 5)(a + 5) = a^2 - 25$.

4. Добуток суми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми):

$$(a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

Наприклад $(2 + y)(4 - 2y + y^2) = 8 + y^3$.

Многочлен з однією змінною

Многочленом n -го степеня з однією змінною називається многочлен виду:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ — дійсні числа $a_n \neq 0$, x — змінна, $n \in N$.

3.3. Квадратний тричлен

Квадратним тричленом називається многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна; a, b і c — деякі дійсні числа, причому $a \neq 0$.

Два многочлени, представлені в стандартному вигляді, **тотожно рівні**, якщо їх степені і коефіцієнти при однакових степенях x рівні. Наприклад, многочлен $x^3 + 2x^2 + 1$ тотожно дорівнює многочлену $ax^3 + bx^2 + cx + d$, якщо $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$.

Коренем квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю.

Наприклад, коренем квадратного тричлена $3x^2 - 2x - 5$ є число -1 , бо при $x = -1$ маємо: $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 5 = 0$.

Число α називається **коренем многочлена** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ — дійсні числа, $a_n \neq 0$, якщо $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$.

Наприклад, число 2 — корінь многочлена $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, бо $2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$.

Якщо число α — корінь многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, то $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$.

Наприклад, $x = 2$ — корінь многочлена $x^3 + x - 3x - 6$, тоді $x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x - 2)(x^2 + 3x + 3)$.

Многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, де $a_n \neq 0$ може мати не більше n коренів.

Якщо многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, де $a_n \neq 0$, має корені $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то цей многочлен можна розкласти на множники:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має не більше двох коренів:

Якщо $D = b^2 - 4ac < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

Наприклад, квадратний тричлен $x^2 - 3x + 5$ коренів не має, оскільки

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -11 < 0;$$

Якщо $D = b^2 - 4ac = 0$, то квадратний тричлен має два рівних кореня

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Наприклад, квадратний тричлен $x^2 - 6x + 9$ має два рівних кореня

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3;$$

Якщо $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратний тричлен має два різних кореня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Наприклад, квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6$ має два різних кореня

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

Число $D = b^2 - 4ac$ називається **дискримінантом квадратного тричлена**.

Теорема Вієта. Якщо x_1 та x_2 - корені квадратного тричлена

$$ax^2 + bx + c, \text{ то виконуються рівності } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Якщо x_1 та x_2 - корені тричлена $x^2 - px + q$, то справедливі формули

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Якщо p, q, x_1, x_2 такі, що $x_1 + x_2 = p, \quad x_1 x_2 = q$, то x_1 та x_2 - корені тричлена $x^2 - px + q$.

Розкладання квадратного тричлена на множники

Якщо x_1 та x_2 - корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то виконується рівність $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$\text{Наприклад, } 2x^2 + 5x - 3 = (x - 0,5)(x + 3); \quad x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4).$$

3.4. Алгебраїчні вирази

Алгебраїчним виразом називається вираз, в якому числа і букви об'єднані чотирма арифметичними діями, а також діями піднесення до натурального ступеня і добування арифметичного кореня.

Вираз, який не містить операції добування кореня зі змінної, називається раціональним.

Раціональний вираз, який не містить дії ділення на змінну (букву) або на вираз, що містить змінну, називається цілим.

Алгебраїчний вираз називається ірраціональним, якщо в ньому виконуються дії добування арифметичного кореня з букв (змінних) або виразів, що містять букви (змінні).

Раціональний вираз називається дробовим, якщо він містить дію ділення на змінну або на вираз, що містить змінну.

Дріб - це вираз $\frac{a}{b}$, де a і b - числові вирази або вирази зі змінними. Якщо a і b - алгебраїчні вирази, то вираз $\frac{a}{b}$ називається алгебраїчним дробом.

Основна властивість дробу

При множенні чисельника і знаменника дробу на один і той же вираз отримуємо дріб, тотожно рівний даному: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, де $b \neq 0, c \neq 0$.

Наприклад, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

Основна властивість дробу використовується при скороченні дробів.

Наприклад, $\frac{x^2+5xy}{2xy+10y^2} = \frac{x(x+5y)}{2y(x+5y)} = \frac{x}{2y}$, $x \neq -5y$;

Додавання і віднімання дробів

Щоб скласти (відняти) дроби з однаковими знаменниками, треба скласти (відняти) їх чисельники, а знаменник залишити незмінним :

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0.$$

Щоб скласти (відняти) дробу з різними знаменниками, треба привести їх до спільного знаменника, а потім скористатися правилом складання дробів з однаковими знаменниками.

$$\text{Наприклад, } \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x-2} = \frac{x^2-x^2-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x}{x^2-4} = \frac{2x}{4-x^2}.$$

Множення і ділення дробів

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити їх чисельники і записати в чисельник, а потім перемножити їх знаменники і записати в знаменник:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

$$\text{Наприклад, } \frac{x^2-4}{x^2} - \frac{x}{2x+4} = \frac{(x^2-4)x}{x^2(2x+4)} = \frac{(x-2)(x+2)x}{x^2 \cdot 2(x+2)} = \frac{x-2}{2x}, \quad x \neq 0, \quad x \neq -2.$$

Щоб розділити один дріб на інший, потрібно перший дріб помножити на дріб, обернений другому:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

$$\text{Наприклад, } \frac{x^2-9}{x+2} : \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x^2-9}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x+3} = \frac{(x^2-9)(x^2-4)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)} =$$

$$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6, \quad x \neq \pm 2, \quad x \neq -3.$$

Ірраціональні вирази та дії над ними.

1. Додавання і віднімання ірраціональних виразів виконується так само, як додавання і віднімання раціональних виразів (одночленів і многочленів).

Наприклад:

$$3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} + 12\sqrt{50} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 5 \cdot 3\sqrt{2} + 12 \cdot 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 60\sqrt{2} = 51\sqrt{2}.$$

2. Щоб виконати дії множення (ділення) ірраціональних виразів з різними показниками кореня, треба: привести їх до загального показника, перемножити (поділити) підкореневі вирази і записати добуток(частку) під знак кореня із загальним показником.

$$\text{Наприклад, } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^4}{b^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{b^3}{a^3}} = \sqrt[12]{\frac{a^4 \cdot b^3}{b^4 \cdot a^3}} = \sqrt[12]{\frac{a}{b}}$$

3. Щоб піднести корінь до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши показник кореня без змін.

$$\text{Наприклад, } \left(\sqrt[3]{a + \sqrt{2}} \right)^2 = \sqrt[3]{(a + \sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{a^2 + 2\sqrt{2}a + 2}.$$

4. Щоб добути корінь з кореня, треба перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін.

$$\text{Наприклад, } \sqrt[3]{\sqrt{a+1}} = \sqrt[6]{a+1}.$$

5. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб, знаменник якого містить корені, в новий дріб, тотожно рівний даному, в знаменнику якого коренів не буде.

Якщо знаменник дробу - корінь або добуток кореня на раціональний множник, то слід чисельник і знаменник дробу помножити на такий степінь кореня того ж показника, щоб отримати степінь з показником, рівним показнику кореня.

$$\text{Наприклад, } \frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a} = 3a \sqrt[3]{a^2}.$$

Якщо знаменник дробу - сума (різниця) квадратних коренів, то дріб можна привести до раціонального знаменника, помноживши чисельник і знаменник на різницю (суму) тих же радикалів.

$$\text{Наприклад: } \frac{a}{1-\sqrt{a}} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}, \text{ якщо } a \geq 0, a \neq 0.$$

Якщо знаменник дробу - сума (різниця) кубічних коренів, то, щоб позбутися від ірраціональності в знаменнику, слід помножити чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат різниці (суми) тих же радикалів.

$$\text{Наприклад, : } \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

Розділ 4. Функції та графіки.

Властивості функцій

4.1. Поняття функції

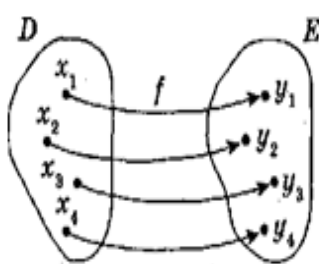


Рис.9

Залежність змінної y від змінної x називається **функцією**, якщо кожному значенню x (рис. 9) відповідає єдине значення y . Цю залежність позначають або однією літерою f , або $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$.

Змінна x називається **незалежною змінною** або аргументом функції, а змінна y - **залежною змінною**

або **функцією**. Якщо задане конкретне значення незалежної змінної $x = x_0$, то $y_0 = f(x_0)$ називається значенням функції f в точці x_0 .

Областю визначення функції $f(x)$ називається множина дійсних значень незалежної змінної x , при яких ця функція визначена (має сенс). Позначається так: $D(f)$ (від англ. *define* - визначати).

Областю значень функції $y = f(x)$ називається множина всіх дійсних значень, які приймає залежна змінна y при всіх значеннях аргументу з області визначення. Позначається так: $E(f)$ (від англ. *Exist* - існування).

Якщо області визначення $D(f)$ і значень $E(f)$ функції - числові множини, то такі функції називаються числовими.

Координатна площина і графік функції

Дві взаємно перпендикулярні прямі x та y , що перетинаються в точці O , із зазначеними на них додатними напрямками (напрямок вказується стрілкою) і одиничними відрізками утворюють *систему координат*. Площина, в якій обрана система координат, називається *координатною площиною*. Пряму x називають віссю абсцис; пряму y - *віссю ординат*, точку O - *початком координат*.

Кожній точці площини відповідають два числа (координати), які записуються після точки в дужках (на першому місці координата по осі x , на другому - координата по осі y). Координата по осі x : називається *абсцисою*, а координата по осі y - *ординатою*. На рис.10 точка A має координати 3 і 4, що записується так: $A(3;4)$.

Для будь-якої пари чисел $(x;y)$ існує лише одна точка, для якої абсцисою є число x , а ординатою - число y .

Наприклад, пара чисел $(-4;2)$ визначає точку $B(-4;2)$ на: рис.10.

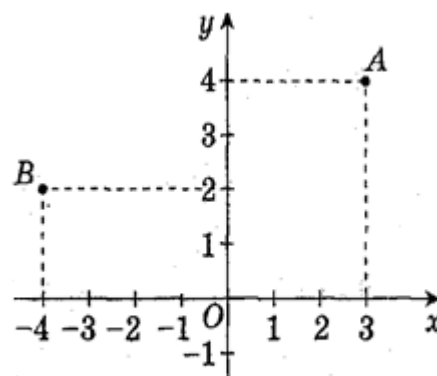


Рис. 10

Множина всіх пар дійсних чисел називається *числовою площиною*.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область визначення функції $y = f(x)$, а друга координата - це відповідне значення функції в точці x .

4.2. Способи задання функції

Найбільш часто функції задаються таблицею, графіком або формулою.

Табличний спосіб - функція задається таблицею.

x	x_1	x_2	x_3	...	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	...	y_n

У першому рядку записані значення незалежної змінної з множини $D(f)$, а другий рядок утворений за правилом $y = f(x)$.

Графічний спосіб - функція задається множиною точок координатної площини, координати x і y яких рівні відповідно аргументам і значенням функцій цих аргументів.

Аналітичний спосіб - функція задається формулою, за якою можна обчислити значення залежної змінної y , якщо підставити конкретне числове значення аргументу x .

Областю визначення функції $y = f(x)$, заданої формулою, називається множина значень, які може приймати x , тобто формула має сенс (всі дії, зазначені формулою, можна виконати).

Наприклад, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, то $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; якщо

$$y = x^3 + x^2, \text{ то } D(y) = R.$$

Правила знаходження області визначення функцій, заданих аналітично

1. Якщо функція має вигляд многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty)$ або $D(y) = R$.

Наприклад, якщо $y = x^4 + x^2 - 1$, то $D(y) = R$.

2. Якщо функція має вигляд $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ та $g(x)$ – многочлени, то слід вважати $g(x) \neq 0$.

Наприклад, якщо $y = \frac{x^2+x}{x^2-x}$, то $x^2 - x \neq 0$,

тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Якщо функція має вигляд $y = \sqrt[2k]{f(x)}$, $k \in N$, то слід вважати $f(x) \geq 0$.

Наприклад, якщо $y = \sqrt[4]{x^2 - 9}$, то $x^2 - 9 \geq 0$, тобто

$D(y) = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

4. Якщо функція має вигляд $y = \frac{1}{f(x)}$, то слід вважати $f(x) \neq 0$.

Наприклад, якщо $y = \frac{1}{\sin x}$, то $\sin x \neq 0$, або $x = \pi k, k \in N$.

5. Якщо функція має вигляд $y = \log_a(f(x))$, $a > 0, a \neq 1$, то слід вважати $f(x) > 0$.

Наприклад, якщо $y = \lg(x^2 - 2x + 1)$, то $x^2 - 2x + 1 > 0$, або $(x - 1)^2 > 0$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

6. Якщо функція має вигляд $y = \log_{f(x)} b$, $b > 0$, то слід вважати

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Наприклад, якщо:

$y = \log_{x+1} 5$, то $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$ то $D(y) = (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

7. Якщо функція має вигляд $y = \operatorname{tg}(f(x))$, то слід вважати

$$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Наприклад, якщо $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$, то $\frac{\pi}{2} + \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$, тобто

$$x \neq n, \quad n \in Z.$$

8. Якщо функція має вигляд $y = \operatorname{ctg}(f(x))$, то слід вважати

$$f(x) \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Наприклад, якщо $y = \operatorname{ctg}(2x - 4)$, то $2x - 4 \neq \pi n, \quad n \in Z$, тобто

$$x \neq \frac{\pi n}{2} + 2, \quad n \in Z.$$

9. Якщо функція має вигляд $y = \arcsin(f(x))$, то слід вважати $|f(x)| \leq 1$.

Наприклад, якщо $y = \arcsin(5x - 1)$, то $|5x - 1| \leq 1$; $-1 \leq 5x - 1 \leq 1$, тобто $0 \leq x \leq \frac{2}{5}$.

10. Якщо функція має вигляд $y = \arccos(f(x))$, то слід вважати $|f(x)| \leq 1$.

Наприклад, якщо $y = \arccos(3x + 1)$, то $|3x + 1| \leq 1$; $-1 \leq 3x + 1 \leq 1$, тобто $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$.

11. Коли функція має вигляд $y = x^\alpha$, то:

а) якщо α - натуральне число, то $D(y) = \mathbb{R}$;

б) якщо α - ціле від'ємне або нуль, то $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) якщо α - додатне неціле число, то $D(y) = [0; +\infty)$;

г) якщо α - неціле від'ємне число, то $D(y) = (0; +\infty)$.

4.3. Функції та їх властивості

Парні і непарні функції

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-якого $x \in D(y)$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$, при цьому $x \in D(y)$.

Наприклад, функція $f(x) = -x^4 + x^2$ парна, оскільки

$$f(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 = -x^4 + x^2 = f(x) \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 11, а).

Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо для будь-якого $x \in D(y)$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, при цьому $x \in D(y)$.

Наприклад, функція $y = x^5 - x^3$ - непарна, оскільки

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 = -(x^5 - x^3) = -f(x) \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 11, б).

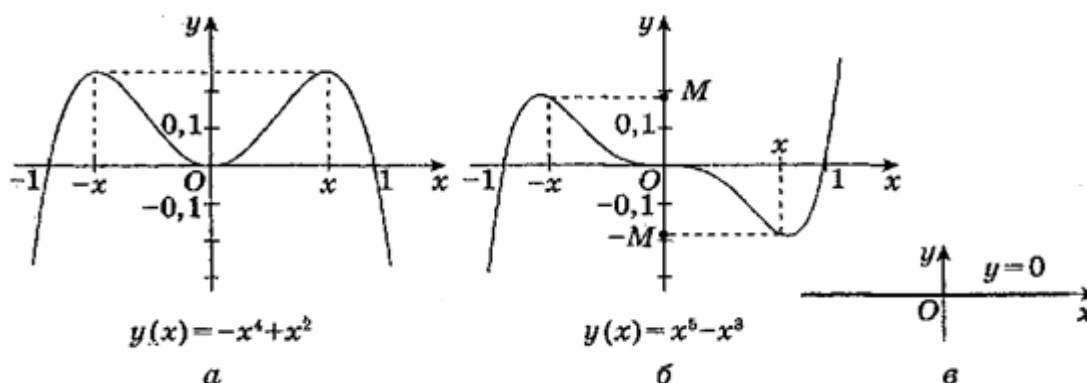


Рис.11

Існують функції, які не є ні парними, ні непарними.

Наприклад, функції $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in N$, $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 0$,
 $y = \log_a x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ не є ні парними, ні непарними.

Єдина функція, задана на множині R , яка є парною і непарною, — це функція $y = 0$ (рис. 11, в).

Властивості парних і непарних функцій

1. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ — парні функції, задані на одній і тій же множині X , то функції $f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ є також парними на множині X .

2. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ — непарні функції, задані на одній і тій же множині X , то функції $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ є непарними функціями на множині X , а функції $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ є парними на множині X .

Зростаючі і спадні функції

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою

на деякій множині X , якщо більшому

значенню аргументу з цієї множини відповідає

більше значення функції, тобто функція $y = f(x)$

зростаюча, якщо для будь-яких $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,

$$x_2 > x_1$$

виконується $f(x_2) > f(x_1)$ або $y_2 > y_1$

(рис. 12, а).

Якщо при зазначених умовах виконується

нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$ або $y_2 \geq y_1$, то функція

називається не спадаючою.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякій множині X , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції,

тобто. функція $y = f(x)$ — спадна, якщо для будь-яких $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,

$$x_2 > x_1 \text{ виконується } f(x_2) < f(x_1) \text{ або } y_2 < y_1 \text{ (рис. 12, б).}$$

Якщо при зазначених умовах виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$ або

$y_1 \geq y_2$, то функція називається не зростаючою.

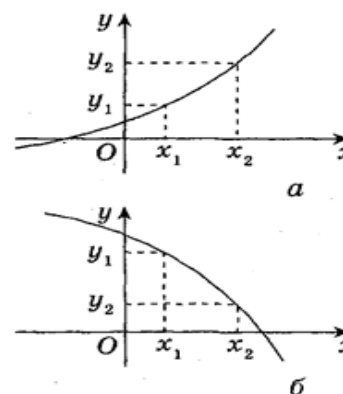


Рис.12

Властивості зростаючих, спадних функцій

1. Якщо функція $y = f(x)$ зростаюча і $y_1 < y_2$ ($f(x_1) < f(x_2)$), то $x_1 < x_2$.
2. Якщо функція $y = f(x)$ спадна і $y_1 < y_2$ ($f(x_1) < f(x_2)$), то $x_1 > x_2$.

Функція $y = f(x)$, зростаюча (спадна) на множині X , називається монотонною на множині X .

Періодичні функції

Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (рис. 13).

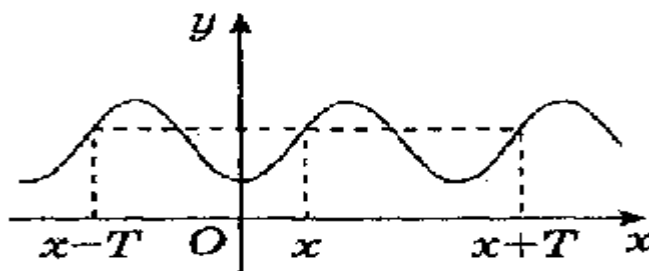


Рис. 13

Властивості періодичних функцій.

1. Якщо T - період функції $y = f(x)$, то число $\pm nT$ ($n \in \mathbb{N}$) також є періодом цієї функції. Наприклад, періодами функції $y = \cos x$ є числа $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \pm 8\pi; \dots$
2. Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T , то функція $y = A f(kx + b)$ також періодична і її період дорівнює $\frac{T}{|k|}$, $k \neq 0$.

Наприклад, періодом функції $y = \{3x + 5\} \in \frac{1}{3}$; періодом $y = tg \frac{x}{3}$ - число 3π .

Періодом функції прийнято називати найменший з додатних періодів.

Складні функції

Якщо y є функцією від u : $y = f(u)$, де u в свою чергу є функцією від аргументу x , тобто $u = g(x)$, то y називається складною функцією від x : $y = f(g(x))$.

Наприклад, функція $y = \sqrt{\cos x}$ складна, оскільки $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x$.

Функцію f називають зовнішньою, а функцію g - внутрішньою.

Обернені функції

Функція називається оборотною, якщо кожне своє значення приймає в єдиній точці області визначення.

Якщо функція $y = f(x)$ оборотна, то для будь-якого y_0 рівняння $f(x) = y_0$ має відносно x єдиний розв'язок.

Функція $g(x)$ називається оберненою до функції $f(x)$, якщо функція $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a , тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$.

У цьому випадку функція $g(x)$ називається оберненою, до функції $f(x)$ і навпаки.

Наприклад, функція $y = 2x - 3$ оборотна, тоді $2x = y + 3$, $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$.

Отже, $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ обернена функція до функції $y = 2x - 3$. Графіки функції $f(x)$ і оберненої до неї функції $g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$ (рис.14).

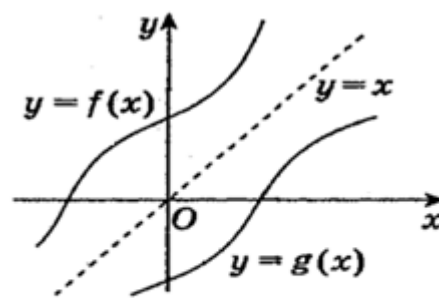


Рис. 14

Наприклад, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $f(x) = x^2$ обернена функції $g(x) = \sqrt{x}$ (рис. 15).

Функції f та g називаються **взаємно оберненими**, якщо область визначення функції f є областю значень функції g , а область значень функції f є областю визначення функції g .

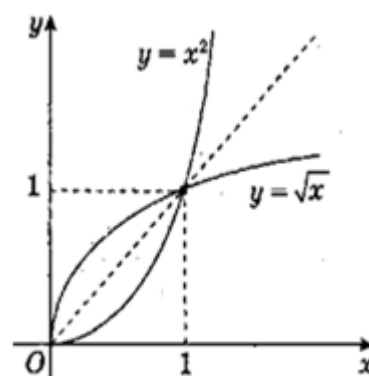


Рис. 15

Наприклад, функції $y = a^x$ та $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 0$;

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{та} \quad y = \arcsin x;$$

$$y = \cos x; \quad x \in [0; \pi] \quad \text{та} \quad y = \arccos x;$$

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{та} \quad \operatorname{arctg} x;$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0; \pi) \quad \text{та} \quad \operatorname{arcctg} x \text{ - взаємно обернені.}$$

4.4. Властивості деяких функцій та їх графіки

Пряма пропорційність

Функція $y = kx$, де k — дійсне число, $k \neq 0$, називається **прямою пропорційністю**.

Основні властивості

1. Область визначення — $\mathbb{R}$.
2. Область значень — $\mathbb{R}$.
3. Функція непарна.

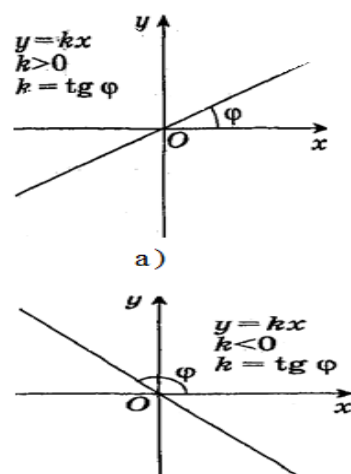


Рис. 16

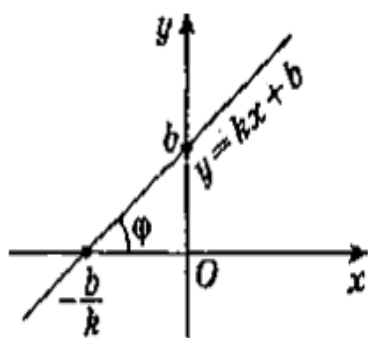
4. Якщо $x = 0$, то $y = 0$.
5. Якщо $k > 0$, то функція зростає на множині R (рис. 16, а).
6. Якщо $k < 0$, то функція спадає на множині R (рис. 16, б).
7. Графік прямої пропорційності - пряма, яка проходить через початок координат.

Лінійна функція

Функція $y = kx + b$, де $k \in R$, $b \in R$, називається лінійною функцією.

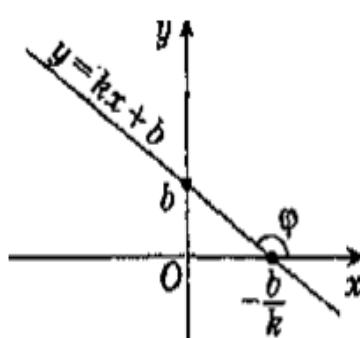
Основні властивості

1. Область визначення $-R$.
2. Область значень $-R$, якщо $k \neq 0$; $\{b\}$, якщо $k = 0$.
3. Якщо $k \neq 0$, $b \neq 0$ то функція ні парна, ні непарна; якщо $k = 0$ —функція парна; якщо $b = 0$, $k \neq 0$ — непарна; якщо $k = 0$, $b = 0$ — і парна, і непарна.
4. Якщо $x = 0$, то $y = b$; якщо $x = -\frac{b}{k}$, функція $y = 0$.
5. Якщо $k > 0$, то функція зростає на множині R (рис. 17, а); якщо $k < 0$, то функція спадає на множині R (рис. 17, б); якщо $k = 0$, то функція постійна, $y = b$ (рис. 17, в).
6. Графік лінійної функції - пряма, що утворює з віссю абсцис кут φ , тангенс якого дорівнює k .



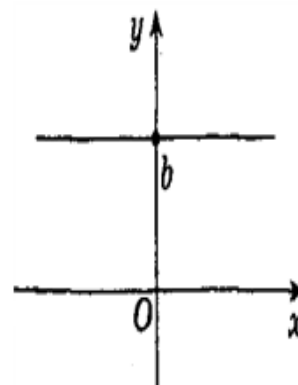
$$k = \operatorname{tg} \varphi > 0$$

а



$$k = \operatorname{tg} \varphi < 0$$

б



$$k = \operatorname{tg} \varphi = 0$$

в

Рис.17

Обернена пропорційність

Функція $y = \frac{k}{x}$, де $k \in R$, $k \neq 0$,

називається *оберненою пропорційністю*.

Основні властивості

1. Область визначення —

$$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Область значень — $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Функція $y = \frac{k}{x}$ непарна.

4. Якщо $k > 0$, то на інтервалі $(-\infty; 0)$ функція спадає, на інтервалі $(0; +\infty)$ також спадає (рис. 18, а). Якщо $k < 0$, то на інтервалах $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ функція зростає (рис. 18, б).

5. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ осі координат не перетинає.

6. Якщо $k > 0$, то при $x > 0$ функція набуває додатніх значень, а при $x < 0$ — від'ємних.

Якщо $k < 0$, то при $x > 0$ функція приймає від'ємні значення, а при $x < 0$ — додатні.

7. Графік оберненої пропорційності — гіпербола.

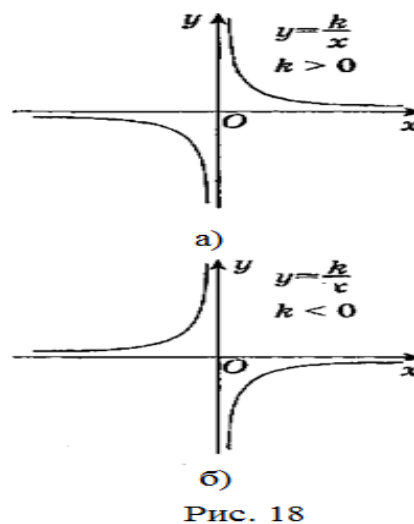


Рис. 18

Функція $y = |x|$

Основні властивості.

1. Область визначення — R .

2. Область значень — $[0; +\infty)$.

3. Функція парна.

4. Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Якщо $x \neq 0$, то $y > 0$.

Графік функції розташований у верхній координатній півплощині.

5. Якщо $x < 0$, то функція спадає; якщо $x > 0$, то функція зростає.

6. Графік функції — об'єднання двох променів бісектрис першої та другої координатних чвертей (рис. 19).

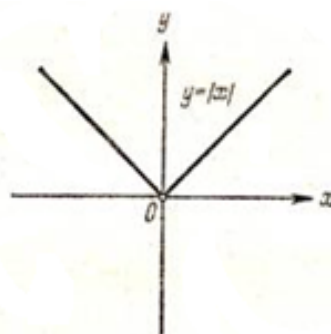
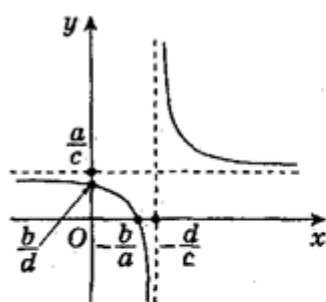


Рис. 19

Дробово - лінійна функція $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

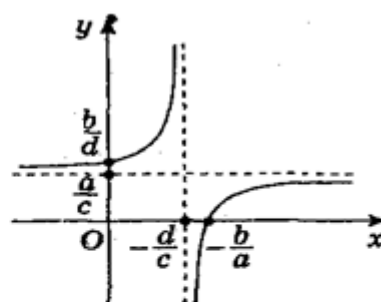
Основні властивості

1. Область визначення $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.
2. Область значень $\left(-\infty; \frac{a}{c}\right) \cup \left(\frac{a}{c}; +\infty\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ та $\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
4. Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$, якщо $ad < bc$ (рис. 20, а).
5. Функція зростає на кожному із проміжків $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$, якщо $ad > bc$ (рис. 20, б).
6. Графік функції –гіпербола.



$ad < bc$

а



$ad > bc$

б

Рис. 20

Квадратична функція

Функція $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, називається *квадратичною*.

Основні властивості

1. Область визначення $-R$.
2. Область значень – якщо $a > 0$, то $x = \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}; +\infty\right)$, якщо $a < 0$, то $\left(-\infty; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.
3. Якщо $b \neq 0$, то функція ні парна, ні непарна; якщо $b = 0$, то функція $y = ax^2 + c$ спадна.

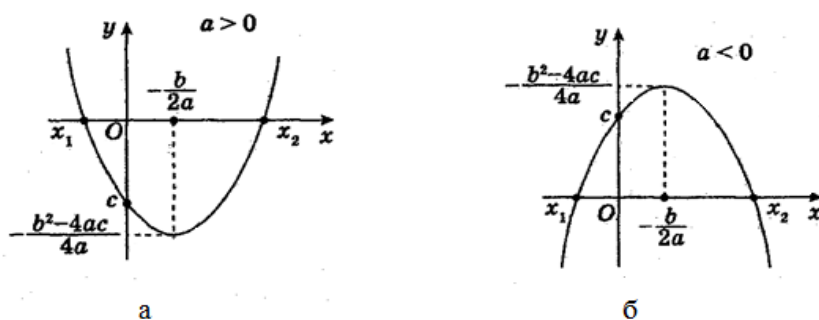


Рис. 21

4. Якщо $a > 0$, то функція спадає на проміжку $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ і зростає на проміжку $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – точка мінімуму (рис. 21, а).

Якщо $a < 0$, то функція зростає на проміжку $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$, і спадає на проміжку $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – точка максимуму (рис. 21, б).

5. Графік функції перетинає осі координат в точках $(0; c)$, $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, де

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

6. Графік функції – *парабола*, вітки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$, і донизу, якщо $a < 0$; координати вершини $(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$; вісь симетрії графіка $x = -\frac{b}{2a}$.

Степенева функція

Функція виду $y = x^n$ називається *степеневою*.

Властивості функції $y = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

1. Область визначення $-\mathbb{R}$.

2. Область значень – якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $[0; +\infty)$; якщо $n = 2k - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{R}$.

3. Якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то функція парна; якщо $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то функція непарна.

4. Графік функції проходить через початок координат.

Графік функції симетричний відносно осі Oy , якщо $n = 2k$ (рис. 22, а–в),

$k \in \mathbb{N}$; і симетричний відносно початку координат, якщо $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ (рис. 22, г–е).

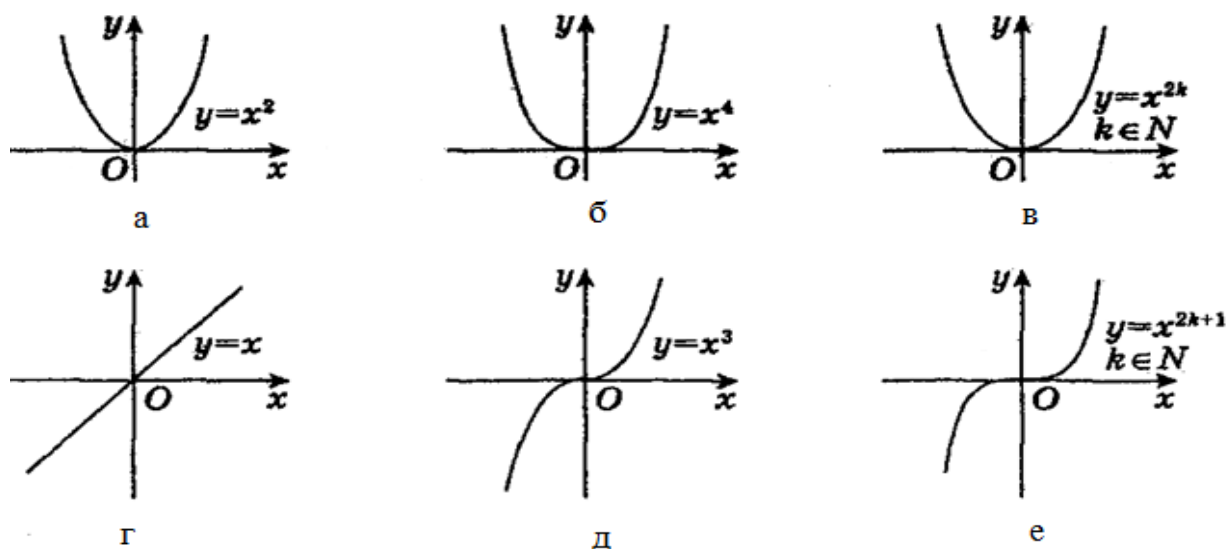


Рис. 22

5. Якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Якщо $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то функція зростає на множині $\mathbb{R}$.

Властивості функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

1. Область визначення— $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Область значень— $(0; +\infty)$, якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$., якщо $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$.
3. Якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то функція парна, графік симетричний відносно осі Oy (рис. 23, а–в); якщо $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то функція непарна і графік симетричний відносно початку координат (рис. 23, г–е).
4. Точок перетину з осями координат графік функції не має.
5. Якщо $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0; +\infty)$; якщо $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

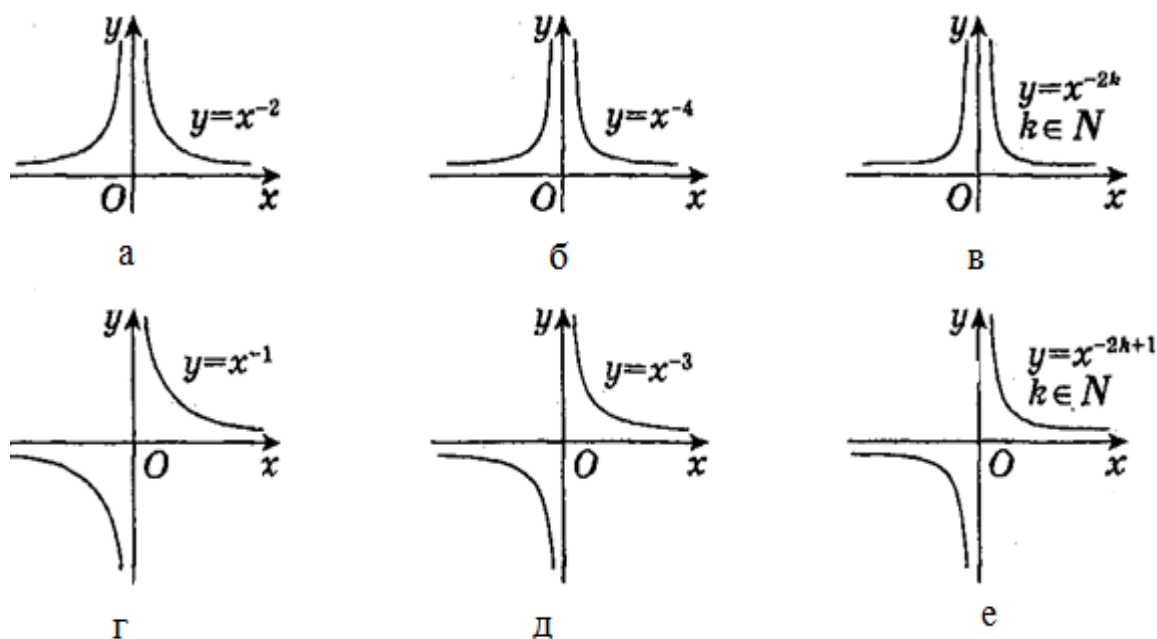


Рис. 23

Властивості функції $y = x^\alpha$, α – дробове число.

1. Область визначення – $[0; +\infty)$, якщо $\alpha > 0$; $(0; +\infty)$, якщо $\alpha < 0$.
2. Область значень – $[0; +\infty)$, якщо $\alpha > 0$; $(0; +\infty)$, якщо $\alpha < 0$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Якщо $\alpha > 0$, то графік функції проходить через початок координат (рис. 24, а–в); якщо $\alpha < 0$, то графік функції не перетинає осей координат (рис. 24, г–е).
5. Якщо $\alpha > 0$, то функція зростає на всій області визначення; якщо $\alpha < 0$, то функція спадає на всій області визначення.

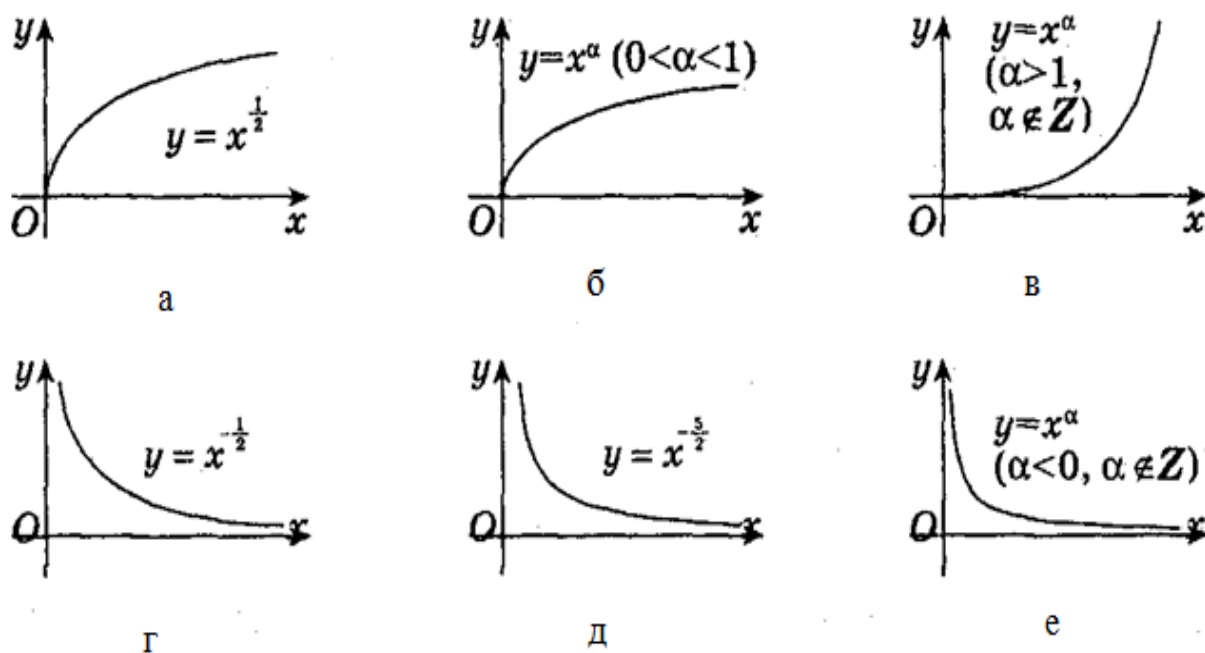


Рис. 24

Функція $y = \sqrt[n]{x}$, де $n \geq 2$, $n \in N$.

Основні властивості

1. Область визначення $-[0; +\infty)$, якщо $n = 2k$, $k \in N$; R , якщо $n = 2k + 1$, $k \in N$.
2. Область значень $-[0; +\infty)$, якщо $n = 2k$, $k \in N$; R , якщо $n = 2k + 1$, $k \in N$.
3. Якщо $n = 2k$, $k \in N$, то функція ні парна, ні непарна (рис. 25, а, б); якщо $n = 2k + 1$, $k \in N$, то функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат (рис. 25, в, г).
4. Функція зростає на всій області визначення.
5. Графік функції проходить через початок координат.

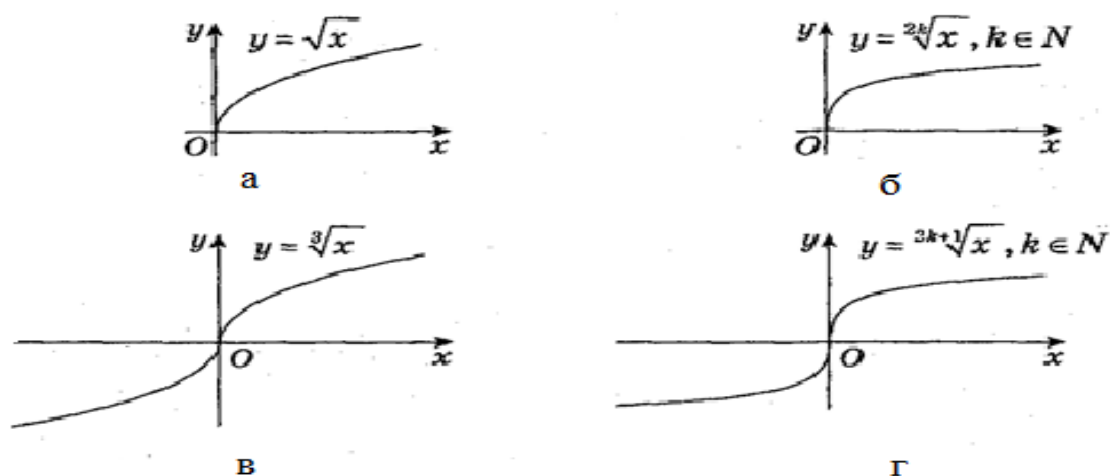


Рис. 25

Показникові функції.

Функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою.

Основні властивості

1. Область визначення $-R$.
2. Область значень $-(0; +\infty)$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; 1)$, вісь Ox не перетинає.

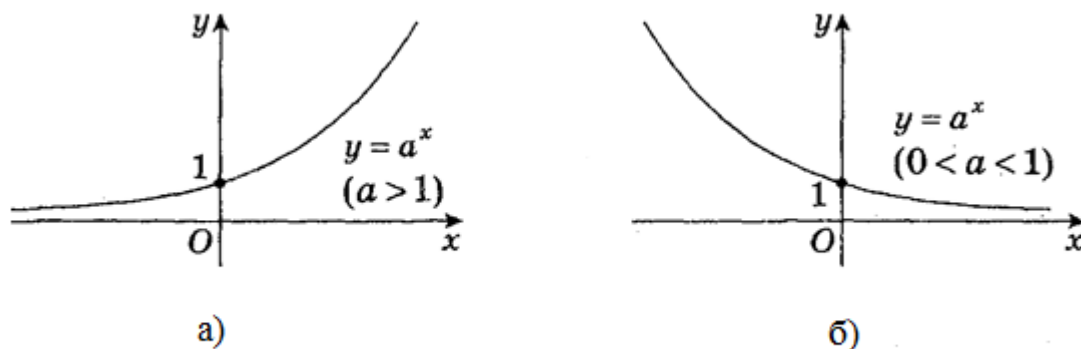


Рис. 26

5. Якщо $a > 1$, то функція зростає на множині $\mathbb{R}$ (рис. 26, а); якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на множині $\mathbb{R}$ (рис. 26, б).

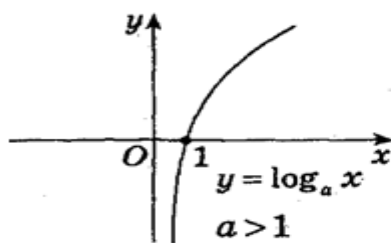
6. Якщо $a > 1$, то $y > 1$ при $x > 0$; $0 < y < 1$ при $x < 0$. Якщо $0 < a < 1$, то $y > 1$ при $x < 0$; $0 < y < 1$ при $x > 0$.

Логарифмічна функція

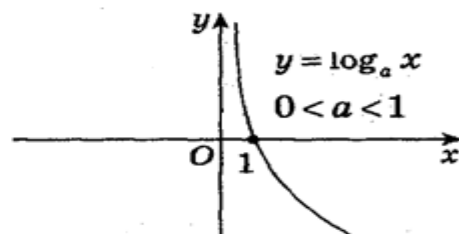
Функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається логарифмічною.

Основні властивості

1. Область визначення $-(0; +\infty)$.
2. Область значень $-\mathbb{R}$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Графік функції перетинає вісь Ox у точці $(1; 0)$, вісь Oy не перетинає.
5. Якщо $a > 1$, то функція зростає на всій області визначення (рис. 27, а); якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на всій області визначення (рис. 27, б).



а



б

Рис 27

6. Якщо $a > 1$, то $y > 0$ при $x > 1$; $y < 0$ при $0 < x < 1$. Якщо $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $0 < x < 1$; $y < 0$ при $x > 1$.

Функція $y = [x]$

Основні властивості

1. Область визначення — $\mathbb{R}$.
2. Область значень — $\mathbb{Z}$.

Якщо $0 \leq x < 1$, то $y = [x] = 0$;

якщо $1 \leq x < 2$, то $y = [x] = 1$;

якщо $-1 \leq x < 0$, то $y = [x] = -1$ і т. д.

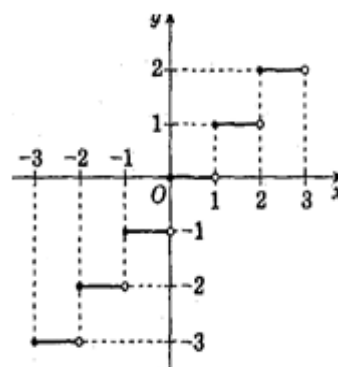


Рис. 28

3. Функція ні парна, ні непарна. На кожному з проміжків $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ функція постійна (рис. 28).

Функція $y = \{x\} = x - [x]$

Основні властивості

1. Область визначення — R .
2. Область значень — $[0; 1)$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Функція приймає тільки невід'ємні значення, завжди $0 \leq \{x\} < 1$.
5. Функція періодична, її період дорівнює 1.
6. На кожному з проміжків $[n; n + 1)$, $n \in Z$ функція зростає (рис. 29).

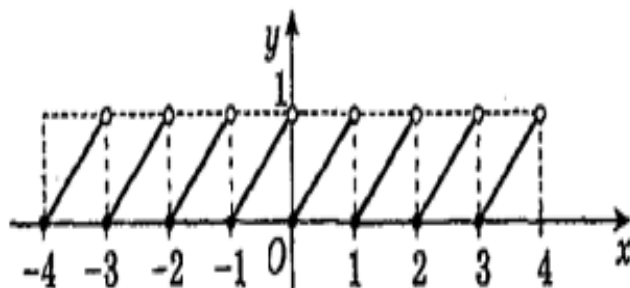


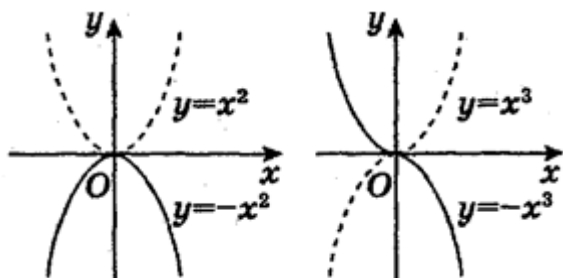
Рис.29

4.5. Перетворення графіків функцій

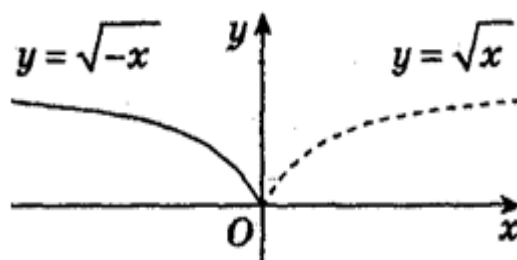
Графік функції $y = -f(x)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі Ox .

Графік функції $y = f(-x)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі Oy .

Наприклад:

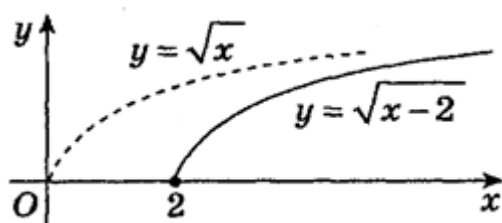


Наприклад:



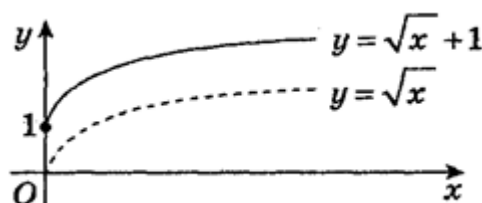
Графік функції $y = f(x - a)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі Ox на a одиниць.

Наприклад:



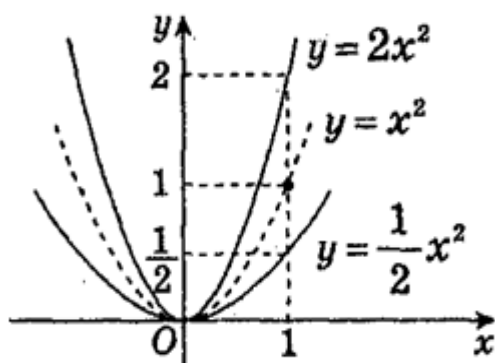
Графік функції $y = f(x) + b$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного переносу вздовж осі Oy на b одиниць.

Наприклад:



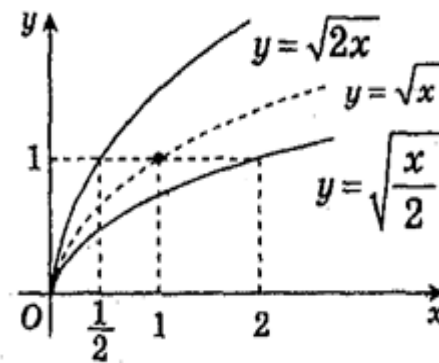
Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, отримують з графіка функції $y = f(x)$ розтягуванням його вздовж осі Oy в k разів, якщо $k > 1$; стисненням уздовж осі Oy в $\frac{1}{k}$ раз, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад:



Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, отримують з графіка функції $y = f(x)$ стисненням його вздовж осі Ox в k разів, якщо $k > 1$; розтягуванням уздовж осі Ox в $\frac{1}{k}$ раз, якщо $0 < k < 1$.

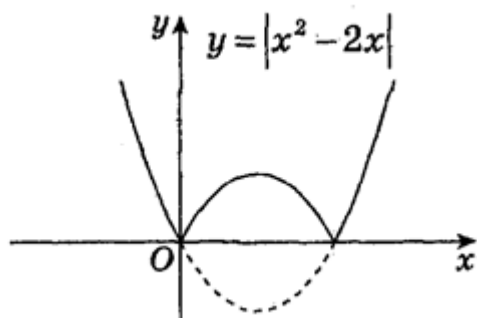
Наприклад:



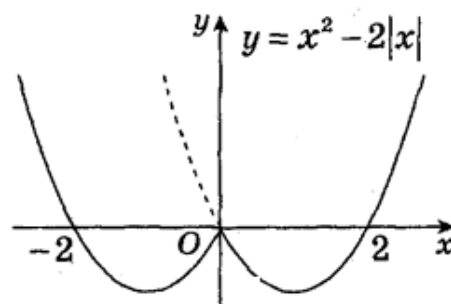
Графік функції $y = |f(x)|$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ так: вище осі Ox (і на самій осі) залишають його без змін; нижче осі Ox — симетрично відображають його відносно осі Ox .

Графік функції $y = f(|x|)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ так: праворуч від осі Oy (і на самій осі) залишають без змін і симетрично відображають цю частину відносно осі Oy .

Наприклад:



Наприклад:



Розділ 5. Тригонометрія

5.1. Означення та властивості тригонометричних функцій

Радіанна міра кутів і дуг

1 *радіан* — центральний кут, що спирається, на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола (рис. 30).

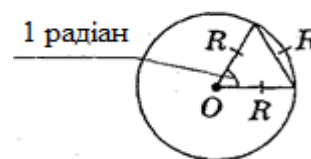
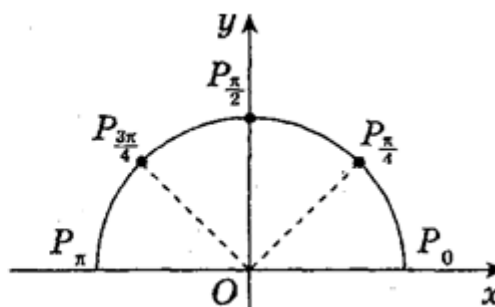
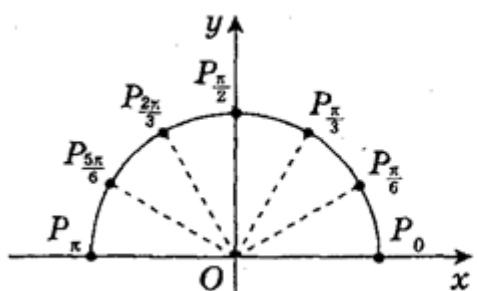


Рис. 30

Зв'язок між градусною і радіанною мірою:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ; 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0,01745 \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} = (180^\circ)/\pi = 57^\circ 17' 45''; n^\circ = \frac{\pi n}{180} \text{ рад}; \alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}.$$



Радіанна і градусна міра деяких кутів.

Кути у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Кути у градусах	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Одиничне коло. Точки одиничного кола і дійсні числа

Одиничним (тригонометричним) колом називається коло радіусом рівним 1 з центром у початку координат (рис. 31).

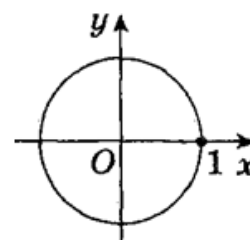


Рис. 31

Відповідність між дійсними числами і точками одиничного кола

Кожному дійсному числу t відповідає лише одна точка P_t , на одиничному колі. Числу 0 ставиться у відповідність точка $P_0(1; 0)$, а кожному числу t ставиться у відповідність точка P_t , утворена в результаті повороту точки P_0 ($1; 0$) на кут t навколо початку координат: якщо $t > 0$, то поворот виконується проти годинникової стрілки; якщо $t < 0$ - за годинниковою стрілкою. Кожній точці P_t відповідає нескінченна множина чисел виду $t + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 32).

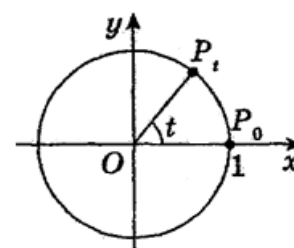


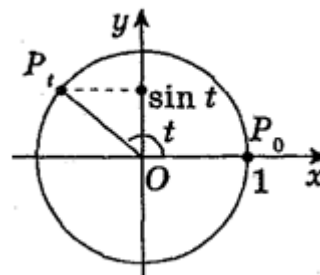
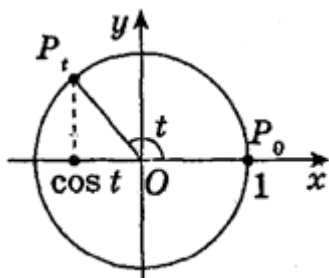
Рис. 32

Означення тригонометричних функцій

Косинусом t називається абсциса точки *Синусом* t називається ордината

P_t одиничного кола: $\cos t = x_{P_t}$.

точки P_t одиничного кола: $\sin t = y_{P_t}$.



Тангенсом кута t називається відношення $\sin t$ до $\cos t$ ($\cos t \neq 0$):

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \left(t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right)$$

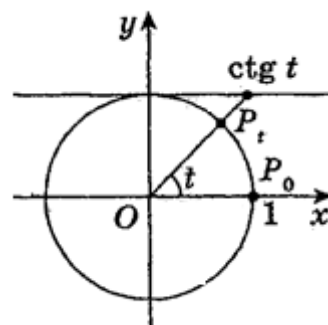
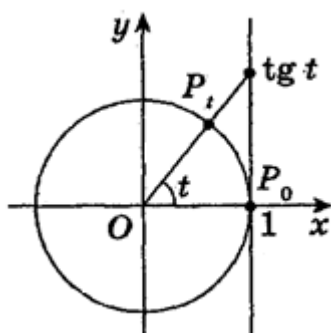
Котангенсом кута t називається відношення $\cos t$ до $\sin t$ ($\sin t \neq 0$):

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} (t \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$$

Вісь тангенсів — пряма $x = 1$. Тангенс t — ордината відповідної точки осі тангенсів.

Вісь котангенсів — пряма $y = 1$.

Котангенс t — абсциса відповідної точки осі котангенсів.



Значення тригонометричних функцій деяких кутів.

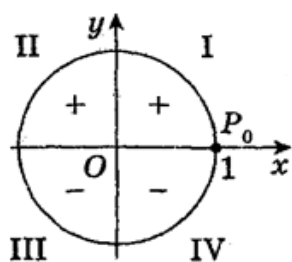
Наближені значення тригонометричних функцій деяких кутів.

α°	5	10	20	30	40	50	60	70	80	85	90	
$\sin \alpha$	0,09	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	0,99	1	$\cos \beta$
$\operatorname{tg} \alpha$	0,09	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	11,43	—	$\operatorname{ctg} \beta$
	85	80	70	60	50	40	30	20	10	5	0	β°

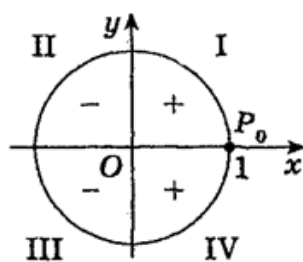
Точні значення тригонометричних функцій деяких кутів

t , рад		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t , °		0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Функція	$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
	$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
	$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
	$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

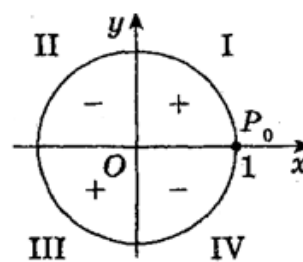
Знаки тригонометричних функцій



Знаки синуса



Знаки косинуса

Знаки тангенса і
котангенса

Парність (непарність) тригонометричних функцій

Функція косинус — парна функція: $\cos(-t) = \cos t$. Функції синус, тангенс і котангенс — непарні функції: $\sin(-t) = -\sin t$; $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$;

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Періодичність тригонометричних функцій

Періодом функцій $\sin t$, $\cos t \in 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 33, а):

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t; \cos(t + 2\pi n) = \cos t, n \in \mathbb{Z}.$$

Найменшим додатнім періодом функцій синус і косинус є 2π .

Періодом функцій $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t \in \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 33, б, в):

$$\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t, n \in \mathbb{Z}.$$

Найменшим додатнім періодом функцій тангенс і котангенс є π .

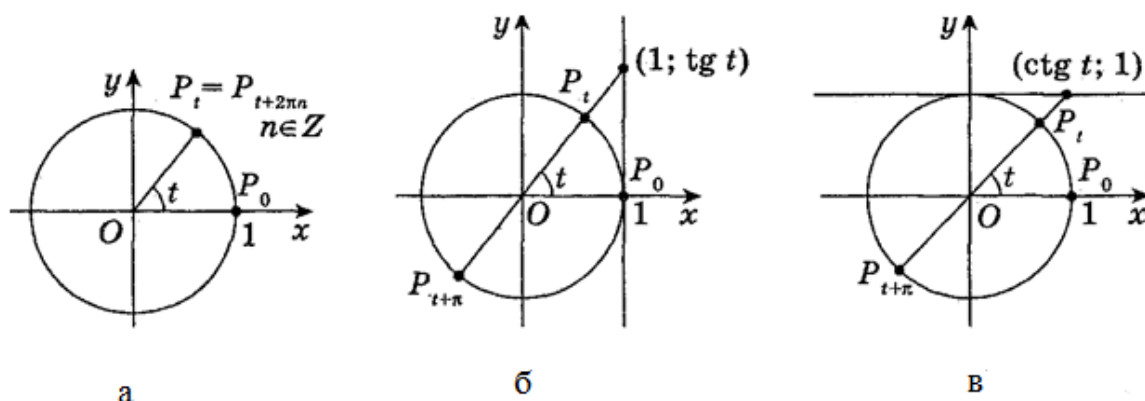


Рис. 33

5.2. Основні тригонометричні формули

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}, \alpha \neq \pi n, \beta \neq \pi n, \alpha \pm \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1-3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Формули половинного аргументу

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

$$\sin \alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$tg \alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$ctg \alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$tg \alpha + tg \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$tg \alpha - tg \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$ctg \alpha + ctg \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$ctg \alpha - ctg \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формули зведення

Функція	Аргумент t							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$tg t$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$	$tg \alpha$
$ctg t$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$	$-ctg \alpha$	$ctg \alpha$

Формула перетворення виразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

де аргумент φ визначається із співвідношень

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$$

5.3. Обернені тригонометричні функції

Арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа

Арксинусом a називається число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a .

Запис $\arcsin a = t$ означає: $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin t = a$.

Наприклад, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Арккосинусом a називається число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a .

Запис $\arccos a = t$ означає: $t \in [0; \pi]$ і $\cos t = a$.

Наприклад, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arccos 1 = 0$.

Арктангенсом a називається число t з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a .

Запис $\operatorname{arctg} a = t$ означає: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, і $\operatorname{tg} t = a$.

Наприклад, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg} 0 = 0$

Арккотангенсом a називається число з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a .

Запис $\operatorname{arcctg} a = t$ означає: $t \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} t = a$.

Наприклад, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

$\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ називають *аркфункціями*.

Основні співвідношення для аркфункцій

$$\sin(\arcsin a) = a, \cos(\arccos a) = a, a \in [-1; 1];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, a \in R.$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a; \arccos(-a) = \pi - \arccos a;$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a;$$

$$\sin(\arcsin \varphi) = \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \cos(\arccos \varphi) = \varphi; \varphi \in [0; \pi];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \varphi) = \varphi, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \varphi) = \varphi; \varphi \in (0; \pi);$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, a \in [-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in R.$$

Значення аркфункцій деяких чисел

Функція	Аргумент x								
	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Функція	Аргумент x						
	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Деякі додаткові співвідношення для аркфункцій

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R;$$

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R.$$

5.4. Властивості тригонометричних і обернених тригонометричних функцій. Графіки цих функцій

Функція $y = \sin x$

Основні властивості

1. Область визначення $—R$.
2. Область значень $—[-1; 1]$.
3. Функція непарна.
4. Функція періодична з найменшим позитивним періодом 2π .
5. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; 0)$, а вісь Ox - в точках $(\pi k; 0)$, де $k \in Z$.
6. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, якщо $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.
7. Функція зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ і спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.
8. Функція набуває найбільше значення $y_{\max} = 1$ в точках $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, і найменше значення $y_{\min} = -1$ в точках $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Графік функції $y = \sin x$ - синусоїда (рис. 34).

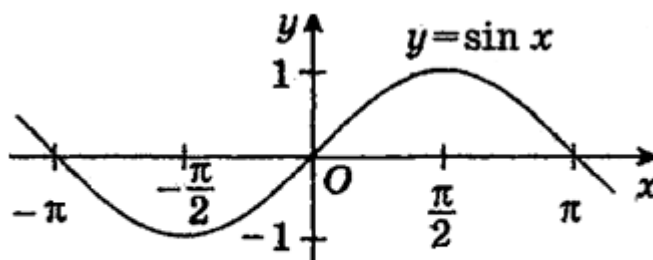


Рис. 34

Функція $y = \cos x$ **Основні властивості**

1. Область визначення — R .
 2. Область значень — $[-1; 1]$.
 3. Функція парна.
 4. Функція періодична з найменшим позитивним періодом 2π .
 5. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; 1)$, вісь Ox - в точках $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0)$, $k \in Z$.
 6. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, якщо $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$.
 7. Функція зростає на кожному із проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
 8. Функція набуває найбільше значення $y_{\max} = 1$ в точках $x_{\max} = 2\pi k$, $k \in Z$, і найменше значення $y_{\min} = -1$ в точках $x_{\min} = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
- Графік функції $y = \cos x$ — косинусоїда (рис. 35).

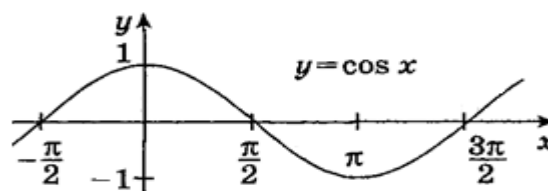


Рис. 35

Функція $y = \operatorname{tg} x$ **Основні властивості**

1. Область визначення — $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
2. Область значень — R .
3. Функція непарна.
4. Функція періодична з найменшим додатнім періодом π .
5. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; 0)$, вісь Ox - в точках $(\pi k; 0)$, $k \in Z$.
6. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, якщо $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k)$, $k \in Z$.
7. Функція зростає на кожному із проміжків $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.
8. Найменших і найбільших значень функція не має.

Графік функції

$y = \operatorname{tg} x$ - тангенсоїда (рис. 36).

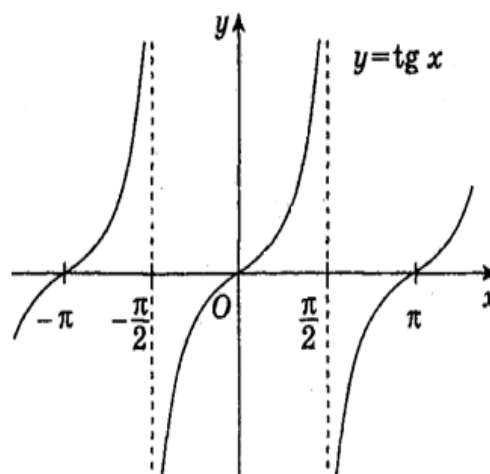


Рис. 36

Функція $y = \operatorname{ctg} x$

Основні властивості

1. Область визначення — $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Область значень — $\mathbb{R}$.
3. Функція непарна.
4. Функція періодична з найменшим додатнім періодом π .
5. Графік функції не перетинає вісь Oy , а вісь Ox перетинає в точках $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0), k \in \mathbb{Z}$.
6. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$;
 $y < 0$, якщо $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.
7. Функція спадає на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.
8. Найбільших і найменших значень функція не має.
9. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ — котангенсоїда (рис. 37).

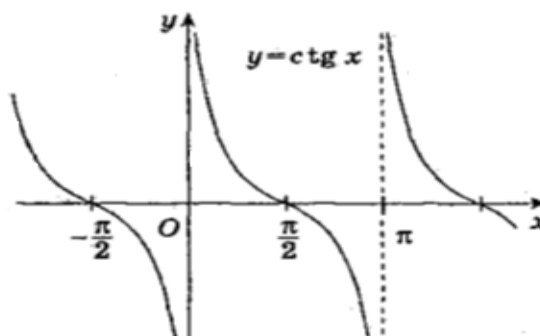


Рис. 37

Функція $y = \arcsin x$

Основні властивості

1. Область визначення — $[-1; 1]$.
2. Область значень — $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
3. Функція непарна (рис. 38).
4. Графік функції перетинає вісь координат в точці $(0; 0)$.
5. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (0; 1]$; $y < 0$, якщо $x \in [-1; 0)$.
6. Функція зростає при $x \in [-1; 1]$.
7. Функція набуває найбільше значення $y_{\max} = \frac{\pi}{2}$ в точці $x_{\max} = 1$ і найменше значення $y_{\min} = -\frac{\pi}{2}$ в точці $x_{\min} = -1$.

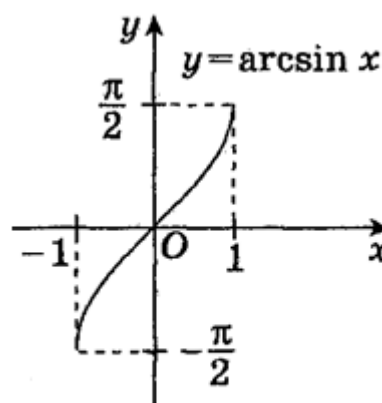


Рис. 38

Функція $y = \arccos x$

Основні властивості

1. Область визначення — $[-1; 1]$.
2. Область значень — $[0; \pi]$.
3. Функція ні парна, ні непарна (рис. 39).

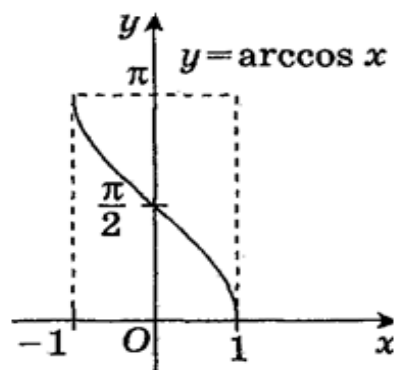


Рис. 39

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

4. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; \frac{\pi}{2})$, а вісь Ox — в точці $(1; 0)$.
5. $y > 0$, якщо $x \in [-1; 1]$.
6. Функція спадає, якщо $x \in [-1; 1]$.
7. Функція приймає найбільше значення $y_{\max} = \pi$ в точці $x_{\max} = -1$ і найменше значення $y_{\min} = 0$ в точці $x_{\min} = 1$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Основні властивості

1. Область визначення $(-\infty; +\infty)$.
2. Область значень $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
3. Функція непарна (рис. 40).
4. Графік функції перетинає вісь координат в точці $(0; 0)$.
5. Проміжки знакосталості: $y > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ якщо $x \in (-\infty; 0)$.
6. Функція зростає на проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
7. Найбільших і найменших значень функція не має.

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$

Основні властивості

1. Область визначення $(-\infty; +\infty)$.
2. Область значень — $(0; \pi)$.

3. Функція ні парна, ні непарна (рис. 41).

$$\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x.$$

4. Графік функції перетинає вісь Oy в точці $(0; \frac{\pi}{2})$, а вісь Ox не перетинає.

5. $y > 0$, якщо $x \in R$.

6. Функція спадає, якщо $x \in R$.

7. Найбільших і найменших значень функція не має.

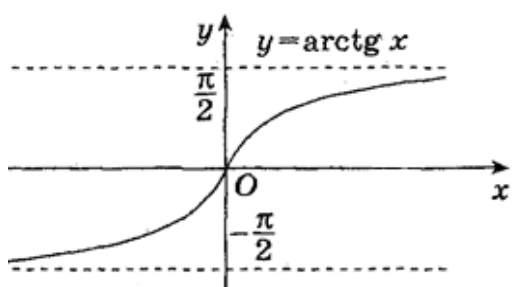


Рис. 40

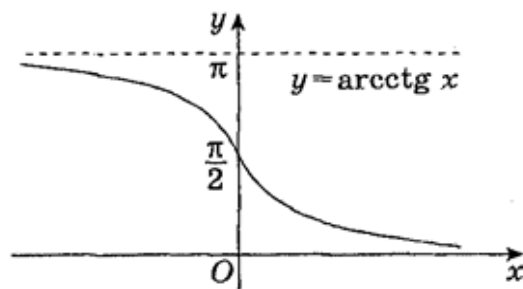


Рис. 41

Розділ 6. Рівняння і системи рівнянь.

6.1. Рівняння з одним невідомим, корені рівняння

Рівнянням, називається рівність, що містить змінну (невідоме).

Коренем (розв'язком) рівняння з одним невідомим називається значення невідомого, при якому рівняння перетворюється в правильну числову рівність, або інакше кажучи, при якому невідоме задовольняє рівняння.

Наприклад, число 3 — корінь рівняння $x^2 - 3x = 0$, оскільки $3^2 - 3 \cdot 3 = 0$.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння називається множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах рівняння визначені.

Наприклад, для рівняння $\lg(x + 3) = 5$ областю допустимих значень є

$x > -3$ оскільки вираз $\lg(x + 3)$ визначено, якщо $x + 3 > 0$.

Рівносильні рівняння

Два рівняння називаються рівносильними, якщо множини їх коренів збігаються. Наприклад, рівняння $x + 3 = 5$ і $x - 1 = 1$ рівносильні, оскільки вони мають спільний корінь 2, а інших коренів не мають; рівняння $x + 7 = x$ і $3 - x = 5 - x$ рівносильні, оскільки не мають коренів.

Теореми про рівносильність рівнянь

1. Якщо до обох частин рівняння додати одне і те ж число або вираз зі змінною, яка не втрачає значення при будь-яких значеннях змінної, то отримаємо рівняння, рівносильне даному. Наприклад, рівняння $x^2 = 9$ і $x^2 + x = 9 + x$ рівносильні.
2. Якщо з однієї частини рівняння перенести в другу частину доданок з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне даному. Наприклад, рівняння $x^3 = x - 1$ і $x^3 - x + 1 = 0$ рівносильні.

3. Якщо обидві частини рівняння помножити або розділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, або на вираз зі змінною, яка не перетворюється в нуль при будь-яких значеннях змінної і не втрачає значення на множині допустимих значень, невідомих для даного рівняння, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, рівняння

$$\frac{1}{2}x = x + 1 \text{ і } x = 2x + 2, \quad x^2 = x \text{ і } \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \text{ рівносильні}$$

4. Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного натурального степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, рівняння

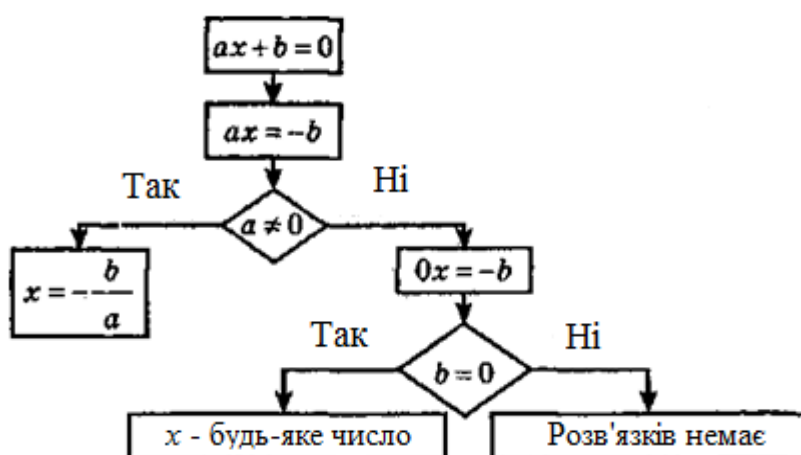
$$x + 1 = 0 \text{ і } (x + 1)^3 = 0 \text{ рівносильні.}$$

6.2. Схеми розв'язків рівнянь, та їх означення.

Лінійні рівняння

Лінійним рівнянням з однієї змінною (невідомою) x називається рівняння виду $ax + b = 0$, де a і b — дійсні числа. Якщо $a \neq 0$, то рівняння називається *рівнянням першого степеня*.

Схема розв'язків лінійних рівнянь

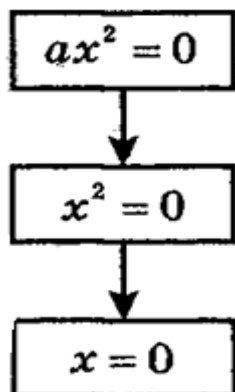


Неповні квадратні рівняння

Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають *неповними квадратними рівняннями*.

Схема розв'язку рівняння

$$ax^2 = 0, a \neq 0$$



$$ax^2 + bx = 0, a \neq 0$$

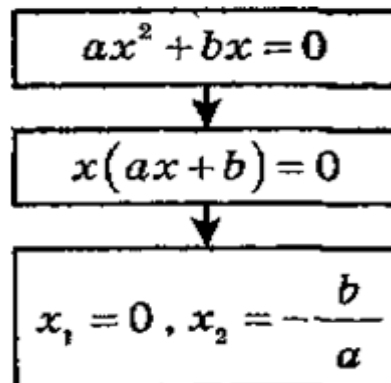
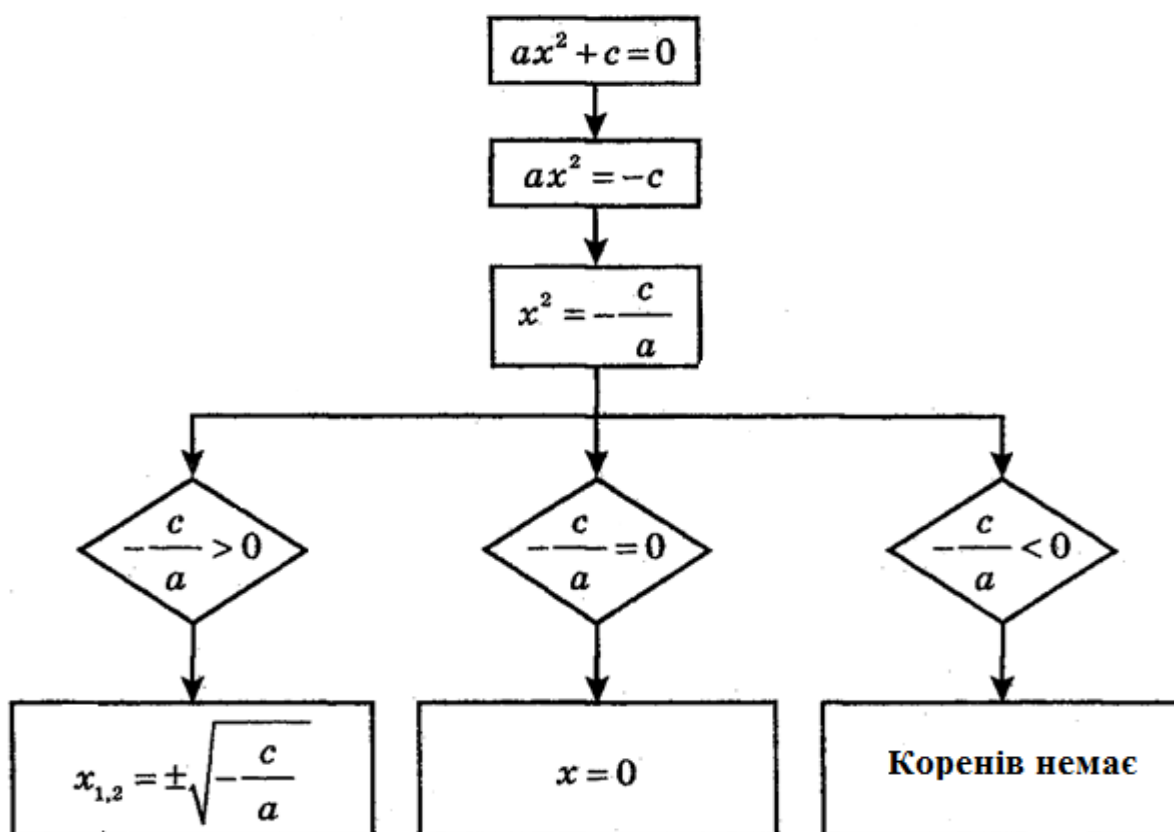


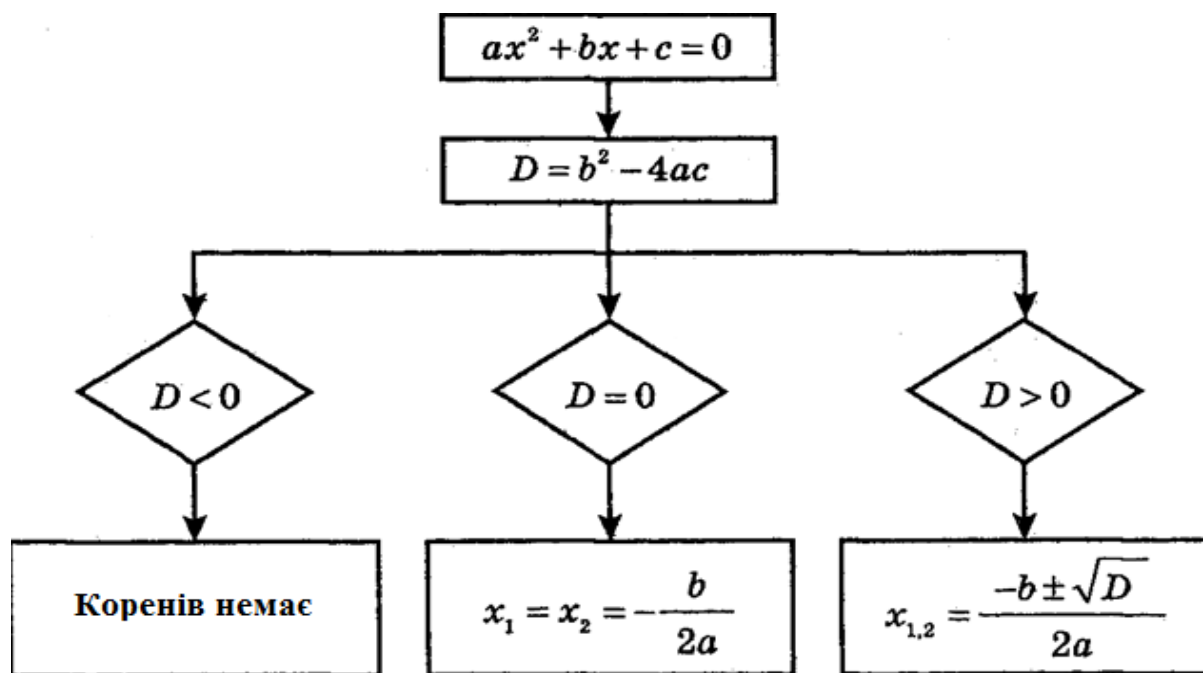
Схема розв'язку рівняння $ax^2 + c = 0, a \neq 0$



Квадратні рівняння

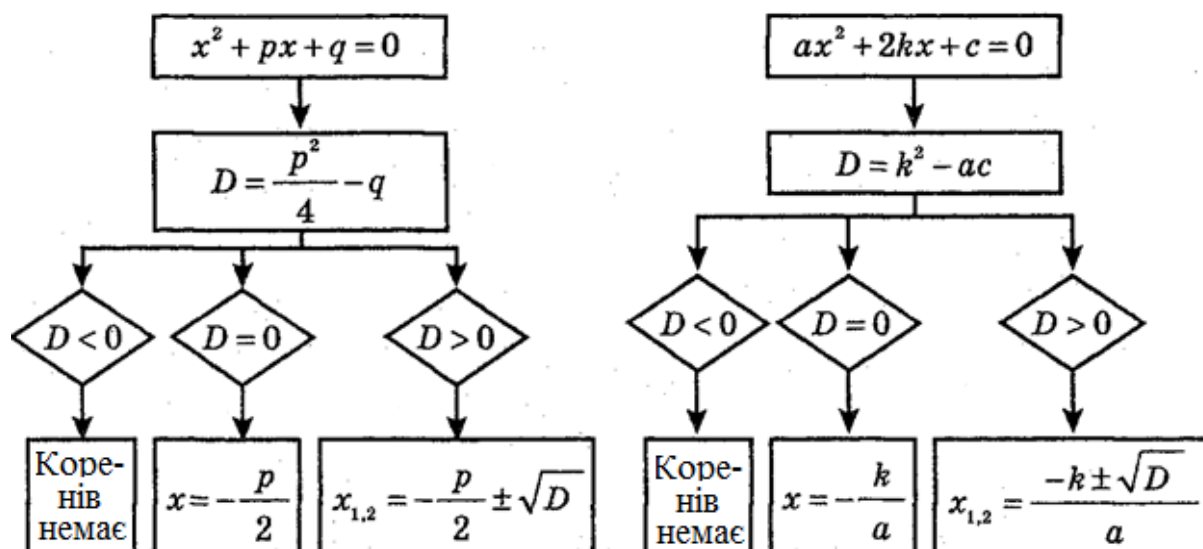
Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$.

Схема розв'язання квадратного рівняння



Окремі випадки розв'язків квадратних рівнянь

Зведене квадратне рівняння ($a = 1$) Квадратне рівняння з парним другим коефіцієнтом



6.3. Системи рівнянь. Методи розв'язання рівнянь

Кілька рівнянь з однією невідомою утворюють *систему рівнянь*, якщо ставиться завдання: знайти всі такі значення змінної, кожне з яких є коренем кожного з рівнянь. Для позначення системи використовують фігурні дужки:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $(x^2 - 1)^2 + ((x + 1)(x + 2))^2 = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ ((x + 1)(x + 2))^2 = 0, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ (x + 1)(x + 2) = 0, \end{cases} \quad \text{тоді}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1, \\ x = -1 \text{ або } x = -2. \end{cases} \quad \text{Отже, } x = -1$$

Кілька рівнянь з однією змінною утворюють *сукупність рівнянь*, якщо ставиться завдання: знайти всі такі значення змінної, кожне з яких, є коренем хоча б одного з даних рівнянь. Для позначення сукупності використовують квадратні дужки:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$ рівносильне сукупності

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 9 = 0, \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 9, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm 3, \end{cases}$$

Отже, $x = \pm 1, x = \pm 3$.

Методи розв'язання рівнянь

1. Розв'язок рівняння $p(x) = 0$ **методом розкладання його лівої частини на множники**. Якщо $p(x) = 0$ і $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x)$, то рівняння $p(x) = 0$ рівносильне сукупності:

$$\begin{cases} p_1(x) = 0, \\ p_2(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_n(x) = 0. \end{cases}$$

Приклад розв'язку: $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$; $(x^3 + 2x^2) - (3x + 6) = 0$;

$$x^2(x + 2) - 3(x + 2) = 0; (x + 2)(x^2 - 3) = 0; \begin{cases} x + 2 = 0, \\ x^2 - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -2, \\ x^2 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } -2, \pm\sqrt{3}$$

2. Розв'язання рівнянь **методом введення нової змінної**. Якщо в рівнянні неодноразово зустрічається один і той же вираз, залежний від змінної, то доцільно позначити цей вираз іншою буквою і розв'язати рівняння щодо введеної змінної, а потім щодо даної.

Приклад розв'язку: $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$; нехай $x^2 + 3x + 1 = y$, тоді $x^2 + 3x + 3 = y + 2$; $y(y + 2) + 1 = 0$; $y^2 + 2y + 1 = 0$; $(y + 1)^2 = 0$;

$$y + 1 = 0; y = -1; x^2 + 3x + 1 = -1; x^2 + 3x + 2 = 0; \begin{cases} x = -1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Відповідь. $-1; -2$.

3. Рівняння зі змінною в знаменнику.

Рівняння $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Приклад рішення: $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} = 0$; $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0, \\ x^2 + 2x + 1 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = -1 \text{ або } x = -3, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Отже, $x = -3$. Відповідь: -3 .

Цілі рівняння вищих степенів

Рівняння $f(x) = g(x)$ називається **цілим**, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — цілі вирази.

Біквадратні рівняння

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ називається **біквадратним** рівнянням.

При його розв'язанні роблять заміну $x^2 = t$. Формула коренів має вигляд:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Приклад розв'язку: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; $x^2 = t$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $\begin{cases} t = 3, \\ t = 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 3, \\ x^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm\sqrt{3}, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Отже, $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm 1$. Відповідь. $\pm\sqrt{3}; \pm 1$.

Тричленні рівняння

Рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ називається **тричленним**.

При його розв'язанні роблять заміну $x^n = t$ і розв'язують рівняння

$$at^2 - bt + c = 0;$$

Приклад розв'язку: $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$; $x^3 = t$; $t^2 - 9t + 8 = 0$; $\begin{cases} t = 8, \\ t = 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 = 8, \\ x^3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, $x = 1$ або $x = 2$. Відповідь: $1; 2$.

Якщо число c — корінь многочлена $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то цей многочлен можна записати у вигляді $p(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$, многочлен степеня $n - 1$.

При знаходженні коренів многочлена доречно скористатись таким твердженням: раціональними коренями многочлена

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — цілі числа, можуть

бути лише числа $\frac{m}{p}$ ($m \in Z, p \in N$ причому $|m|$ — дільник числа $|a_0|$, а p дільник числа $|a_n|$ (m і p — взаємно прості числа).

Приклад: $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Цілими коренями даного рівняння можуть бути лише дільники числа -6 , тобто числа $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Підбором встановлюємо, що $x = 1$ — корінь даного рівняння, тоді $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$; $(x^3 - x^2) - (5x^2 - 5x) + (6x - 6) = 0$;

$$x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = 0; \quad (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0;$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ (x^2 - 5x + 6) = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, x = 3. \end{cases} \text{ Відповідь. } 1; 2; 3.$$

Раціональні рівняння

Рівняння $f(x) = g(x)$ називається *раціональним*, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — раціональні вирази.

Щоб розв'язати раціональне рівняння, треба:

- 1) знайти спільний знаменник всіх дробів, що входять в рівняння;
- 2) замінити дане рівняння цілим, помноживши обидві його частини на спільний знаменник;
- 3) розв'язати отримане ціле рівняння;
- 4) виключити з коренів рівняння ті, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

Приклад:

$$1 + \frac{2}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x+1};$$

$$1 \cdot (x^2 - 1) + \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{1} - \frac{6}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{1} = \frac{3}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{1};$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 + 2(x+1) - 6 = 3(x-1), \\ x^2 - 1 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 7 + 2x + 2 = 3x - 3, \\ x^2 \neq 1; \end{cases}$$

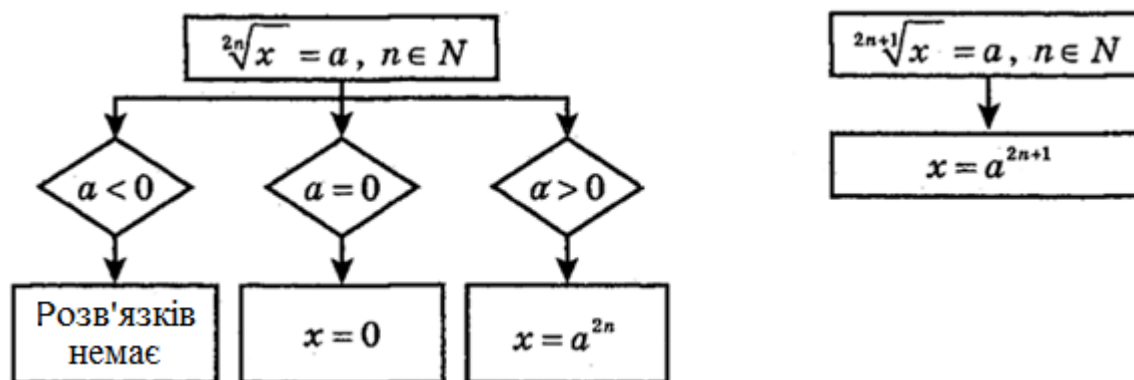
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2 \text{ або } x = -1, \\ x \neq \pm 1; \end{cases}$$

Отже, $x = 2$. Відповідь :2.

Ірраціональні рівняння

Ірраціональним рівнянням називається рівняння, в якому змінна міститься під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.

Найпростіші ірраціональні рівняння



Рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, $n \in \mathbb{N}$, рівносильне рівнянню $f(x) = g^{2n+1}(x)$.

Рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, $n \in \mathbb{N}$, рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, $n \in \mathbb{N}$, рівносильне одній із систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклади розв'язання:

1. $\sqrt[3]{-2x-5} = -3$; $-2x-5 = (-3)^3$; $-2x-5 = -27$; $-2x = -22$;

$$x = 11$$

Відповідь : 11.

2. $\sqrt{x+3} = 2x+5$; $\begin{cases} x+3 = (2x+5)^2, \\ 2x+5 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x+3 = 4x^2+20x+25, \\ 2x+5 \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+19x+22=0, \\ 2x+5 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x=-2, x=-5,5 \\ 2x+5 \geq 0; \end{cases}$ звідси $x = -2$. Відповідь : -2

3. $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3+5x}$; $\begin{cases} x^2-3 = 3+5x, \\ x^2-3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x^2-3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x=6, x=-1, \\ x^2-3 \geq 0; \end{cases}$

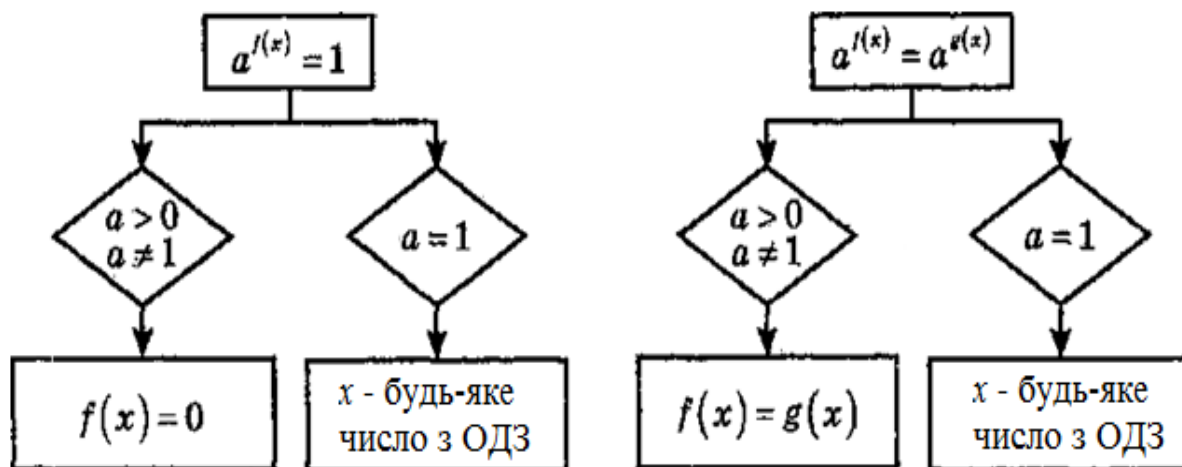
звідси $x = 6$. Відповідь : 6.

Показникові рівняння

Показниковими рівняннями називаються рівняння, в яких змінна міститься в показнику степеня при постійних додатніх основах.

Наприклад, рівняння $2^x + 3 = 0$, і $3^{x+1} - 3^x + 1 = 0$ – показникові.

Найпростіші показникові рівняння



Рівняння $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ рівносильне рівнянню

$$f(x) = \log_a b.$$

Приклад: $3^x - 2 = 0$; $3^x = 2$; $x = \log_3 2$. Відповідь : $\log_3 2$.

Рівняння $b_1 a^{mx+k_1} + b_2 a^{mx+k_2} + \dots + b_n a^{mx+k_n} = c$ рівносильне рівнянню $a^{mx}(b_1 a^{k_1} + b_2 a^{k_2} + \dots + b_n a^{k_n}) = c$.

Приклад: $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$; $3^{x-2}(3^2 - 2) = 63$; $3^{x-2} \cdot 7 = 63$; $3^{x-2} = 9$, $3^{x-2} = 3^2$; $x - 2 = 2$; $x = 4$. Відповідь : 4.

Рівняння $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ рівносильне системі $\begin{cases} a^x = t > 0, \\ At^2 + Bt + C = 0. \end{cases}$

Приклад розв'язку: $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$;

$$(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0; \quad \begin{cases} 7^x = t, \\ t^2 - 8t + 7 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7^x = t, \\ t = 7, \text{ або } t = 1. \end{cases}$$

Отже, $\begin{cases} 7^x = 7, \\ 7^x = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

Відповідь : 0; 1.

Рівняння $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ рівносильне рівнянню

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0.$$

Приклад розв'язання : $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x;$$

$$\frac{3 \cdot 4^{2x}}{9^{2x}} + \frac{2 \cdot 9^{2x}}{9^{2x}} = \frac{5 \cdot 4^x \cdot 9^x}{9^{2x}}; \quad 3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5\left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0; \quad \begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = t, \\ 3t^2 - 5t + 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = t, \\ t = \frac{2}{3}, \text{ або } t = 1. \end{cases} \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1; \end{cases} \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}, \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x = 1, \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = 0. \end{cases}$$

Відповідь : 0; $\frac{1}{2}$.

Логарифмічні рівняння

Логарифмічними рівняннями називаються рівняння, що містять змінну під знаком логарифма.

Найпростіші логарифмічні рівняння

$$\boxed{\log_a x = b, a > 0, a \neq 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x = a^b}$$

$$\boxed{\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(x) = a^b}$$

Рівняння $\log_a f(x) = g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ рівносильне системі: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^{g(x)}. \end{cases}$

Приклад: $\log_3(9^x - 72) = x$; $\begin{cases} 9^x - 72 = 3^x, \\ 9^x - 72 > 0; \end{cases} \begin{cases} 3^x = t, \\ t^2 - t - 72 = 0, \\ 9^x - 72 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x = 9 \text{ або } 3^x = -8, \\ 9^x - 72 > 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ 9^x - 72 > 0, \end{cases}$ отже, $x = 2$. Відповідь : 2.

Рівняння $\log_{g(x)} f(x) = b$

рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g^b(x). \end{cases}$$

Приклад: $\log_{3-x}(x^2 - x - 1) = 1$; $\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ x^2 - x - 1 = (3 - x)^1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ x^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 1 > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ x = \pm 2; \end{cases}$ звідси $x = -2$. Відповідь : -2.

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x); \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x); \end{cases}$$

Приклад: $\lg(x + 1,5) = \lg \frac{1}{x}; \quad \begin{cases} x + 1,5 > 0, \\ x + 1,5 = \frac{1}{x}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 1,5 > 0, \\ x^2 + 1,5x - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x + 1,5 > 0, \\ x = -2 \text{ або } x = 0,5; \end{cases} \text{ звідси } x = 0,5. \text{ Відповідь : } 0,5.$$

Рівняння $b_1 \log_a f_1(x) + b_2 \log_a f_2(x) + \dots + b_n \log_a f_n(x) = c \log_a g(x),$

$$a > 0$$

$$a \neq 1 \text{ рівносильне системі : } \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f_1^{b_1}(x) \cdot f_2^{b_2}(x) \cdot \dots \cdot f_n^{b_n}(x) = g^c(x). \end{cases}$$

Приклад: $\log_5(x - 1) + \log_5(x - 2) = \log_5(x + 2);$

$$\begin{cases} \log_5((x - 1)(x - 2)) = \log_5(x + 2), \\ x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x - 1)(x - 2) = x + 2, \\ x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = x + 2, \\ x > 1, \\ x > 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = x + 2, \\ x > 1, \\ x > 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x = 0, \\ x > 1, \\ x > 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0, x = 4, \\ x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$$

звідси $x = 4$. Відповідь : 4.

Рівняння $A_n \log_a^n f(x) + \dots + A_1 \log_a f(x) + A_0 = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$
розв'язується заміною $\log_a f(x) = t$.

Приклад: $\log_2^2 x - 3 \log_2 x = 4; \quad \begin{cases} \log_2 x = t, \\ t^2 - 3t - 4 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_2 x = t, \\ t = 4 \text{ або } t = -1; \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} \log_2 x = 4, \\ \log_2 x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = 2^4, \\ x = 2^{-1}; \end{cases} \begin{cases} x = 16, \\ x = 0,5. \end{cases}$$

Відповідь. 16; 0,5.

Рівняння $f(x)^{\log_a g(x)} = b, \quad a > 0, \quad b > 0$ рівносильно або системі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ \log_a f(x) \cdot \log_a g(x) = \log_a b; \text{ якщо } b \neq 1, \end{cases}$$

або рівнянню $f(x) = 1 \quad (g(x) = 1),$ якщо $b = 1$.

Приклад: $x^{\lg x - 2} = 1000; \quad \lg(x^{\lg x - 2}) = \lg 1000;$

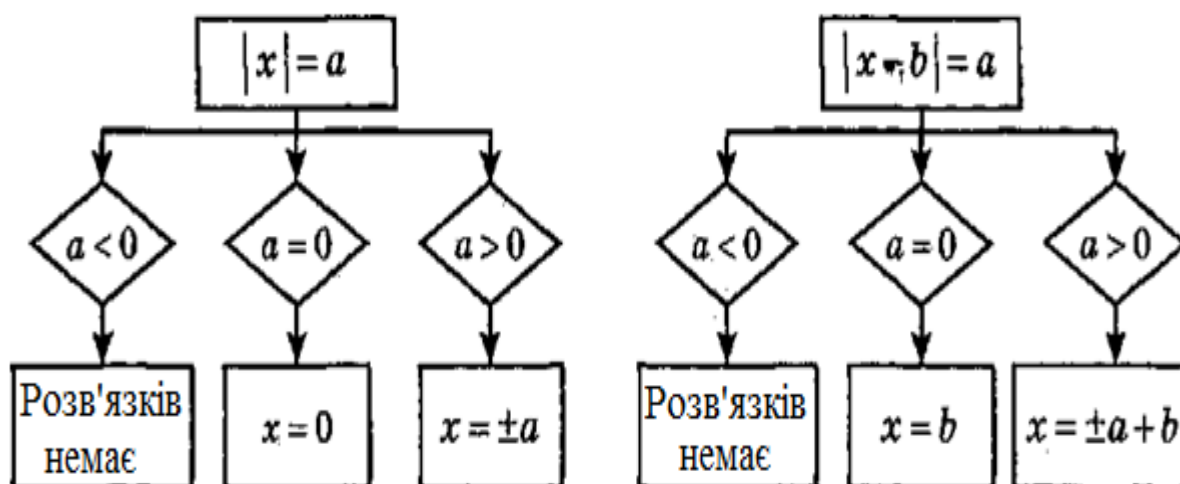
$$(l g x - 2) l g x = 3; \quad l g^2 x - 2 l g x - 3 = 0; \quad \begin{cases} l g x = t, \\ t^2 - 2t - 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = t, \\ t = 3 \text{ або } t = -1; \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} \lg x = 3, \\ \lg x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = 10^3, \\ x = 10^{-1}; \end{cases} \begin{cases} x = 1000, \\ x = 0,1. \end{cases}$$

Відповідь : 0,1; 1000.

Рівняння з модулем

Найпростіші рівняння з модулем



Рівняння $|f(x)| = |g(x)|$ рівносильне об'єднанню рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x); \end{cases} \text{ або рівняння } f^2(x) = g^2(x)$$

Приклад: $|x| = |x - 4|$; $\begin{cases} x = 4 - x, \\ x = -4 + x; \end{cases} \begin{cases} 2x = 4, \\ 0x = -4; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

Відповідь : 2.

Рівняння $|f(x)| = g(x)$ рівносильне двом системам:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад: $|x^2 - x - 8| = -x$; $\begin{cases} x^2 - x - 8 = -x, \\ -x \geq 0; \end{cases}$

або $\begin{cases} x^2 - x - 8 = x, \\ -x \geq 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2 - x - 8 = -x, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 8 = 0, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 8, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2}, \\ -x \geq 0; \end{cases} \text{ отже } x = -2\sqrt{2}.$

$$2) \begin{cases} x^2 - x - 8 = x, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -2 \\ -x \geq 0; \end{cases} \quad \text{отже } x = -2.$$

Відповідь : $-2; -2\sqrt{2}$.

Рівняння $|f(x)| = a$, де $a \geq 0$, рівносильне об'єднанню рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Приклад: $|x^2 + 5x + 6| = 2;$ $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 2, \\ x^2 + 5x + 6 = -2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0, \\ x^2 + 5x + 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = -4. \end{cases}$$

Відповідь : $-1; -4$.

При розв'язанні більш складних рівнянь з модулем треба:

- 1) знайти ОДЗ рівняння;
- 2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
- 3) позначити знайдені нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на інтервали;
- 4) знайти розв'язки в кожному інтервалі і обов'язково перевірити, чи входять знайдені значення у розглянутий інтервал.

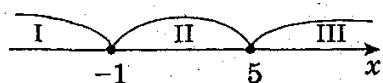


Рис. 43

Приклад: $|x + 1| + |x - 5| = 20$. Вирази $x + 1$ і $x - 5$ дорівнюють нулю, якщо $x = -1$ і $x = 5$ відповідно, тому розглянемо наступні три випадки (рис.43).

$$\text{I. } \begin{cases} x \leq -1, \\ -x - 1 - x + 5 = 20; \end{cases} \begin{cases} x \leq -1, \\ -2x = 16; \end{cases} \begin{cases} x \leq -1, \\ x = -8; \end{cases} \quad \text{отже, } x = -8.$$

$$\text{II } \begin{cases} -1 \leq x \leq 5, \\ x + 1 - x + 5 = 20; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq x \leq 5, \\ 0x = 14; \end{cases} \quad \text{отже, коренів немає.}$$

$$\text{III. } \begin{cases} x > 5, \\ x + 1 + x - 5 = 20; \end{cases} \begin{cases} x > 5, \\ 2x = 24; \end{cases} \begin{cases} x > 5, \\ x = 12 \end{cases} \quad \text{отже, } x = 12.$$

Відповідь : $-8; 12$.

Тригонометричні рівняння

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, в яких невідоме (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції. Деякі тригонометричні рівняння шляхом тотожних перетворень можна привести до рівняння з однією тригонометричною функцією, а потім зробити заміну і привести рівняння до алгебраїчного.

Приклади розв'язання:

$$1. \sin^2 x + 4 \cos x = 2,75; \quad (1 - \cos^2 x) + 4 \cos x = 2,75;$$

$$-\cos^2 x + 4 \cos x - 1,75 = 0; \quad \cos^2 x - 4 \cos x + 1,7 = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = t, \\ t^2 - 4t + 1,75 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = t, \\ t = \frac{1}{2} \text{ або } t = \frac{7}{2}, \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{7}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь : } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$2. \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4; \quad \operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4; \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t + \frac{3}{t} = 4; \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t^2 - 4t + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t = 1 \text{ або } t = 3; \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 3; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z, \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь : } \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in Z.$$

Рівняння, права частина яких дорівнює 0, часто можна розв'язати розкладанням їх лівої частини на множники.

Приклад рішення:

$$\sin 5x = \sin x; \quad \sin 5x - \sin x = 0;$$

$$2 \sin \frac{5x - x}{2} \cos \frac{5x + x}{2} = 0; \quad \sin 2x \cos 3x = 0; \quad \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi n, \quad n \in Z, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь : } \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z.$$

Тригонометричне рівняння виду:

$$a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + a_2 \sin^{k-2} x \cos^2 x + \dots + a_k \sin^k x = 0,$$

називається *однорідним*, якщо всі члени рівняння у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних, (або від двох функцій однієї

змінної), мають однаковий сумарний степінь k . Однорідне рівняння легко привести до рівняння відносно $\operatorname{tg} x$, якщо всі його члени розділити на $\cos^k x$. При цьому, якщо $a_0 \neq 0$, то такий розподіл не призводить до втрати коренів. Якщо $a_0 = 0$, то $\cos x$ слід винести за дужки.

Приклад:

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0; \quad \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t^2 - 3t + 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t = 2 \text{ або } t = 1; \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Відповідь : $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$.

Рівняння $a \cos x + b \sin x = c$ рівносильне рівнянню $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{r}$, де

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arcsin \frac{a}{r}.$$

Приклад: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}};$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{3} \sin x \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{1}{2};$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}; \quad x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Відповідь : $-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$.

Графічний спосіб розв'язування рівнянь

Щоб графічно розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$, слід побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ і знайти абсциси точок перетину побудованих графіків.

Приклад розв'язання: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$. Побудувавши в

одній системі координат графіки функцій $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ і

$y = x + 1$ (рис. 42), знаходимо абсцису точки перетину графіків: $x = 0$.

Відповідь : 0.

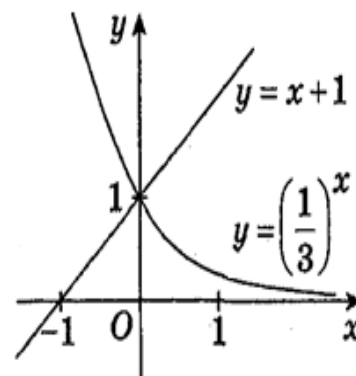


Рис. 42

6.4. Рівняння з двома змінними його розв'язки, та графіки.

Рівність, що містить дві змінні (невідомі), називається *рівнянням з двома змінними (невідомими)*.

Розв'язком рівняння з двома змінними $f(x; y) = 0$ називається впорядкована пара чисел, яка перетворює його в правильну рівність. Якщо дано рівняння з двома змінними x і y , то прийнято у запису його розв'язків на першому місці ставити значення змінної x , а на другому — значення y .

Наприклад, пари $(4; 3)$, $(3; 4)$, $(-3; 4)$, $(-3; -4)$ — розв'язки рівняння $x^2 + y^2 = 25$ однак пари $(1; 5)$, $(2; 3)$ розв'язком рівняння $x^2 + y^2 = 25$ не будуть. Рівняння з двома змінними, що мають одні й ті ж розв'язки, називаються *рівносильними*. Рівняння з двома змінними, що не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Для рівнянь з двома змінними вірні теореми про рівносильні рівняння.

Графік рівняння з двома змінними

Графіком рівняння з двома змінними x і y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де пара $(x; y)$ є розв'язком відповідного рівняння.

Графік рівняння слід відрізняти від графіка функції. Графік рівняння тільки тоді є графіком функції, коли кожна пряма, паралельна осі Oy , перетинає його не більше, ніж в одній точці.

Наприклад, зображені на рис.43 півкола – графіки функцій $y = \sqrt{4 - x^2}$ (верхнє півколо) і $y = -\sqrt{4 - x^2}$ (нижнє півколо). Їх об'єднання – все коло – графік рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

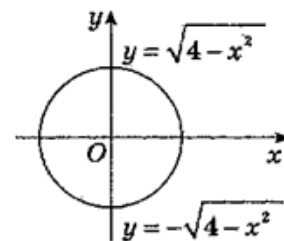
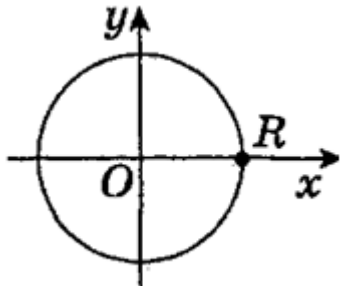
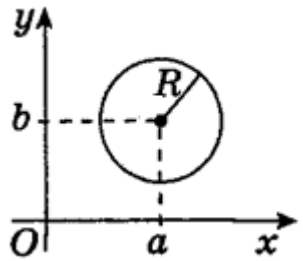
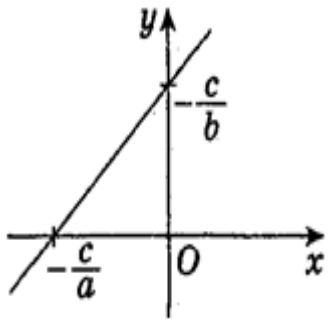
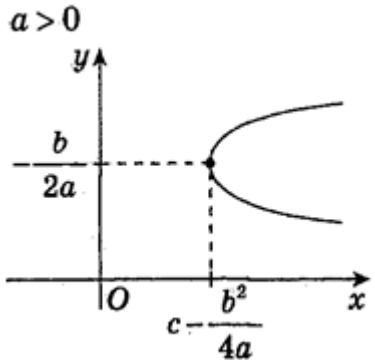
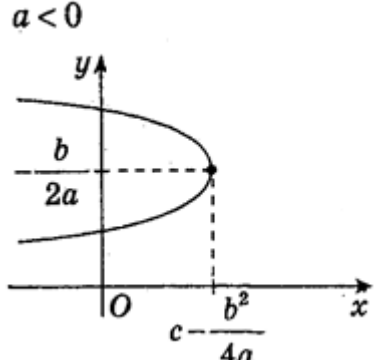
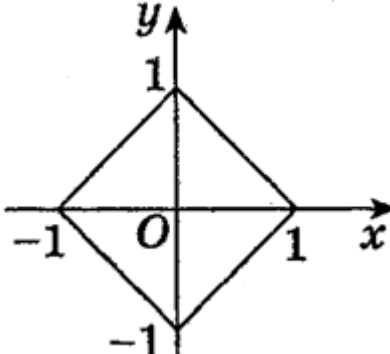


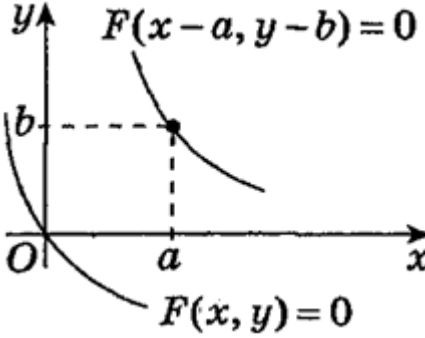
Рис. 43

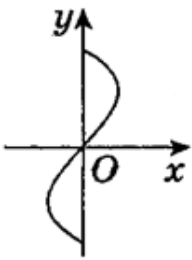
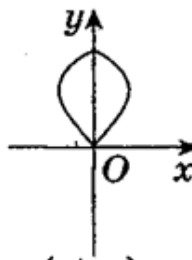
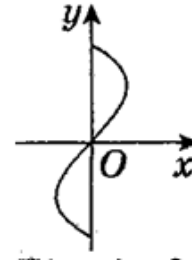
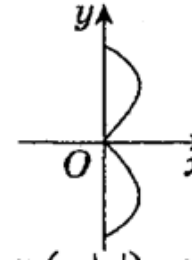
Графіки деяких рівнянь

Рівняння	Графік	Опис
$x^2 + y^2 = R^2$		Коло з центром $(0; 0)$ радіуса R
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$		Коло з центром $(a; b)$ радіуса R
$ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)		Пряма: якщо $a = 0$, паралельна осі Ox ; якщо $b = 0$, паралельна осі Oy ; якщо $c = 0$, проходить через $(0; 0)$

$x = ay^2 + by + c$	$a > 0$  $a < 0$ 	Парабола з вершиною $\left(c - \frac{b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$. Якщо $a > 0$, вітки спрямовані вправо, Якщо $a < 0$, вітки спрямовані вліво
$ x + y = 1$		Квадрат, центр якого лежить в точці $(0; 0)$, діагоналі рівні 2, лежать на координатних осях

Перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$

Рівняння	Перетворення	Геометрична ілюстрація
$F(x - a; y - b) = 0$	Паралельне перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ на вектор $\vec{n}(a; b)$	

$F(x ; y) = 0$	Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ праворуч від осі Oy (і на самій осі) залишається без змін, і ця ж частина симетрично відображається відносно осі Oy	 $F(x; y) = 0$  $F(x ; y) = 0$
$F(x; y) = 0$	Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$, розташована вище осі Ox (і на самій осі), залишається без змін, і ця ж частина симетрично відображається щодо осі Ox	 $F(x; y) = 0$  $F(x; y) = 0$

6.5. Системи рівнянь з двома змінними

Кілька рівнянь з двома змінними, щодо яких поставлено завдання знайти всі спільні розв'язки, називаються **системою рівнянь з двома змінними**. При записі система рівнянь позначається зліва об'єднуючою фігурною дужкою.

Розв'язати систему рівнянь з двома змінними означає знайти всі її розв'язки або довести, що система розв'язків не має.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називається пара значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність. Наприклад, пара чисел $x = 3$, $y = 2$ (записується так: $(3; 2)$) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Рівносильні системи рівнянь

Системи рівнянь з двома змінними, що мають одні й ті ж розв'язки, називаються **рівносильними**. Системи рівнянь, що не мають розв'язків, також називаються рівносильними.

Теореми про рівносильність систем рівнянь

1. Якщо замінити порядок рівнянь системи, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Наприклад, системи $\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 10 \end{cases}$ рівносильні.

2. Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Наприклад, системи $\begin{cases} 5x + 5y = 10, \\ x + y = 3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 3 \end{cases}$ рівносильні.

3. Якщо в системі рівнянь з одного рівняння виразити одну змінну через іншу змінну і отриманий вираз підставити замість цієї змінної в друге рівняння системи, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Наприклад, системи $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ і $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 + (x - 3)^2 = 2 \end{cases}$ рівносильні.

4. Якщо одне з рівнянь системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого, помноженого на число $\beta \neq 0$, (а всі інші рівняння залишити без змін), то одержимо систему, рівносильну даній.

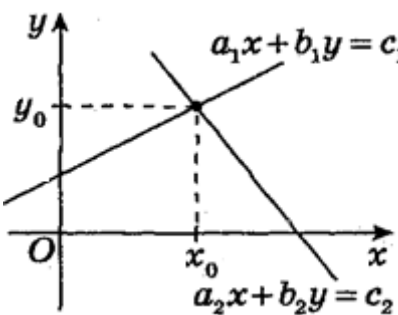
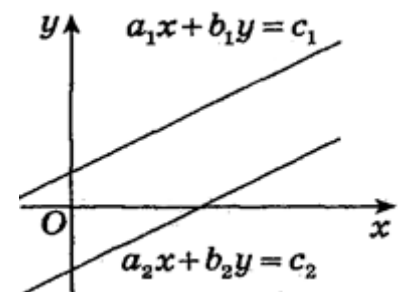
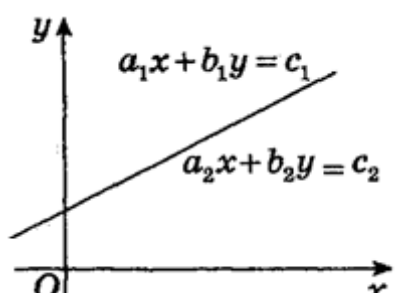
Наприклад, системи $\begin{cases} 2x - 3y = 10, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ і $\begin{cases} (2x - 3y) \cdot 2 + (3x + 2y) \cdot 3 = 35, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

рівносильні.

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Система виду $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ називається **системою лінійних рівнянь з двома змінними**.

6.6. Можливі методи розв'язування системи рівнянь з двома змінними

Умова	Графічна інтерпретація	Множина розв'язків
Коефіцієнти при невідомих (змінних) в рівнянні не пропорційні, тобто. $a_1b_2 \neq a_2b_1$	 Прямі перетинаються	Один розв'язок. $x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$ $y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
Коефіцієнти при невідомих (змінних) в рівнянні пропорційні, тобто. $a_1b_2 = a_2b_1$, однак вони не пропорційні вільним членам $a_1c_2 \neq a_2c_1$ або $b_1c_2 \neq b_2c_1$	 Прямі паралельні	Розв'язків немає
Коефіцієнти при невідомих (змінних) і вільні члени в рівнянні пропорційні, тобто. $a_1b_2 = a_2b_1$; $a_1c_2 = a_2c_1$ $b_1c_2 = b_2c_1$	 Прямі співпадають	Множина розв'язків

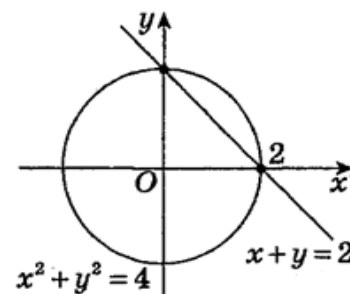
Графічний спосіб розв'язання системи рівнянь з двома змінними

Щоб розв'язати систему рівнянь графічним способом, треба:

1) виконати рівносильні перетворення системи так, щоб зручно було побудувати графіки рівнянь системи;

2) побудувати графіки;

3) знайти координати точок перетину побудованих ліній. Ці координати і є розв'язками системи рівнянь.



Приклад:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \text{ Побудувавши графіки рівнянь } x + y = 2$$

Рис. 44

(пряма, що проходить через точки

$(0; 2)$ і $(2; 0)$) і $x^2 + y^2 = 4$ (коло з центром в точці $(0; 0)$ і радіусом 2) (рис.

44), знаходимо точки перетину ліній: $(0; 2)$ і $(2; 0)$. Отже, розв'язком даної системи є пари: $(0; 2)$ і

$(2; 0)$.

Відповідь : $(0; 2), (2; 0)$.

Розв'язання системи рівнянь з двома змінними способом додавання

Щоб розв'язати систему з двома змінними методом *алгебраїчного додавання*, треба:

- 1) зрівняти коефіцієнти при одній з змінних (при виразах) шляхом почленного множення обох рівнянь на множники, підібрані відповідним чином;
- 2) додати (або відняти) почленно рівняння системи, виключивши одну із змінних; розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
- 3) знайти значення другої змінної таким же способом (або підстановкою знайденого значення змінної в будь-яке з заданих рівнянь системи);
- 4) записати відповідь.

Приклад рішення:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 5x - 3y = 2. \end{cases} \text{ почленно помножити перше рівняння системи на 3, а}$$

$$\text{друге — на 2, отримаємо систему } \begin{cases} 9x + 6y = 15, \\ 10x - 6y = 4. \end{cases} \text{ Почленно додати рівняння}$$

системи, маємо: $(9x + 6y) + (10x - 6y) = 15 + 4$, $19x = 19$, $x = 1$.

Почленно помножити перше рівняння на -5 , а друге на 3 , отримаємо систему

$$\begin{cases} -15x - 10y = 25, \\ 15x - 9y = 6. \end{cases}$$

Додати почленно рівняння, маємо. $-19y = -19$, $y = 1$.

Відповідь : $(1; 1)$.

Розв'язання системи рівнянь з двома змінними способом підстановки

Щоб розв'язати систему двох рівнянь з двома змінними **способом підстановки**, треба:

- 1) виразити з одного рівняння системи одну змінну через другу;
- 2) підставити знайдене значення в друге рівняння системи і одержати рівняння щодо другої змінної;
- 3) розв'язати отримане рівняння і знайти значення цієї змінної;
- 4) підставити знайдені значення у вираз для першої змінної і отримати її відповідні значення;
- 5) записати відповідь.

Приклад:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x - y = 2; \end{cases} \begin{cases} (2 + y)^2 + y^2 = 34, \\ x = 2 + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 4y + y^2 + y^2 = 34, \\ x = 2 + y; \end{cases} \begin{cases} x = 2 + y, \\ 2y^2 + 4y - 30 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y, \\ y^2 + 2y - 15 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 + y, \\ y = -5 \text{ або } y = 3. \end{cases} \text{Отже, } \begin{cases} x = -3, \\ y = -5; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь : $(-3; -5)$, $(5; 3)$.

Розв'язання системи двох рівнянь з двома змінними методом введення нової змінної

При розв'язанні систем нелінійних рівнянь, як правило, використовуються різні комбінації декількох методів розв'язання систем, зокрема *метод введення нової змінної*.

Приклад:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases} \quad \text{Нехай } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = a, \\ \frac{1}{x-y} = b, \end{cases} \quad \text{тоді } \begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + 4b = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b, \\ 3(2 - b) + 4b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 - b, \\ b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases} \quad \text{Тоді маємо } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1, \\ \frac{1}{x-y} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + x - y = 2, \\ x + y - x + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2, \\ 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Відповідь : $(1; 0)$.

Розділ 7. Нерівності та системи нерівностей

7.1. Нерівності та системи нерівностей з однією змінною та їх розв'язки

Нерівністю з однією змінною (невідомим) називається два вирази зі змінною (невідомим), з'єднані знаком нерівності: $>$ (більше), $<$ (менше), $\geq$ (більше або дорівнює, не менше), $\leq$ (менше або дорівнює, не більше).

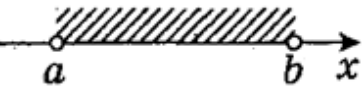
Розв'язком нерівності називається значення змінної (невідомого), при якому нерівність перетворюється в правильну числову нерівність.

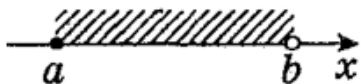
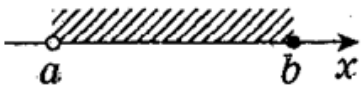
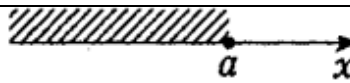
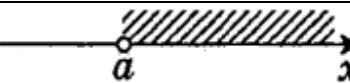
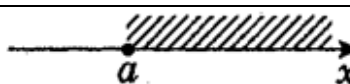
Наприклад, число 5 є розв'язком нерівності $x^2 - 6x < 0$, оскільки $5^2 - 6 \cdot 5 < 0$.

Розв'язати нерівність означає знайти всі його розв'язки або довести, що їх немає.

Розв'язком нерівності є деяка підмножина дійсних чисел.

Деякі підмножини дійсних чисел, їх позначення, зображення на координатній прямій і запис у вигляді нерівності

Назва	Позначення	Зображення	Запис у вигляді нерівності
Числова пряма	$(-\infty; +\infty), R$		$-\infty < x < +\infty$
Закритий проміжок (відрізок)	$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
Відкритий проміжок (інтервал)	$(a; b)$		$a < x < b$

Напіввідкритий проміжок	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$
Нескінченний проміжок (промінь)	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

Рівносильні нерівності

Дві нерівності називаються *рівносильними*, якщо множина розв'язків збігається.

Областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності називається множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах нерівності визначені.

Наприклад, областю допустимих значень нерівностей $x^2 \geq x$ є множина дійсних чисел; а областю допустимих значень нерівності $\sqrt{x+3} < x$ є множина $[-3; +\infty)$. Оскільки вираз $\sqrt{x+3}$ визначено, якщо $x+3 \geq 0$.

Теореми про рівносильність нерівностей

1. Якщо до обох частин нерівності додати одне і те ж число або вираз зі змінною, що не втрачає сенс при будь-якому значенні змінної з області визначення нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній. Звідси випливає, що з однієї частини нерівності можна перенести в другу доданок з протилежним знаком: $f(x) \pm g(x) \leq h(x)$ тоді $f(x) \leq h(x) \mp g(x)$. Наприклад, нерівності $x^2 \leq x+2$ і $x^2 - x - 2 \leq 0$ рівносильні.

2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число або на вираз зі змінною, яка набуває лише додатні значення і не втрачає сенс на множині допустимих значень невідомої для даної нерівності, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Наприклад, нерівності $5x \geq 10$ і $x \geq 2$; $\frac{x}{x^2+1} < 1$ і $x < x^2 + 1$ рівносильні.

3. Якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме від'ємне число або на вираз зі змінною, яка набуває лише від'ємних значень і не втрачає сенс на множині допустимих значень невідомої для даної нерівності, а також поміняти знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Наприклад, нерівності $\frac{\sqrt{-x-1}}{\arctg x} \geq 1$ і $\sqrt{-x-1} \leq \arctg x$; $-7x > 7$ і $x < -1$ рівносильні.

4. Якщо обидві частини нерівності піднести до непарного натурального степеня і зберегти знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

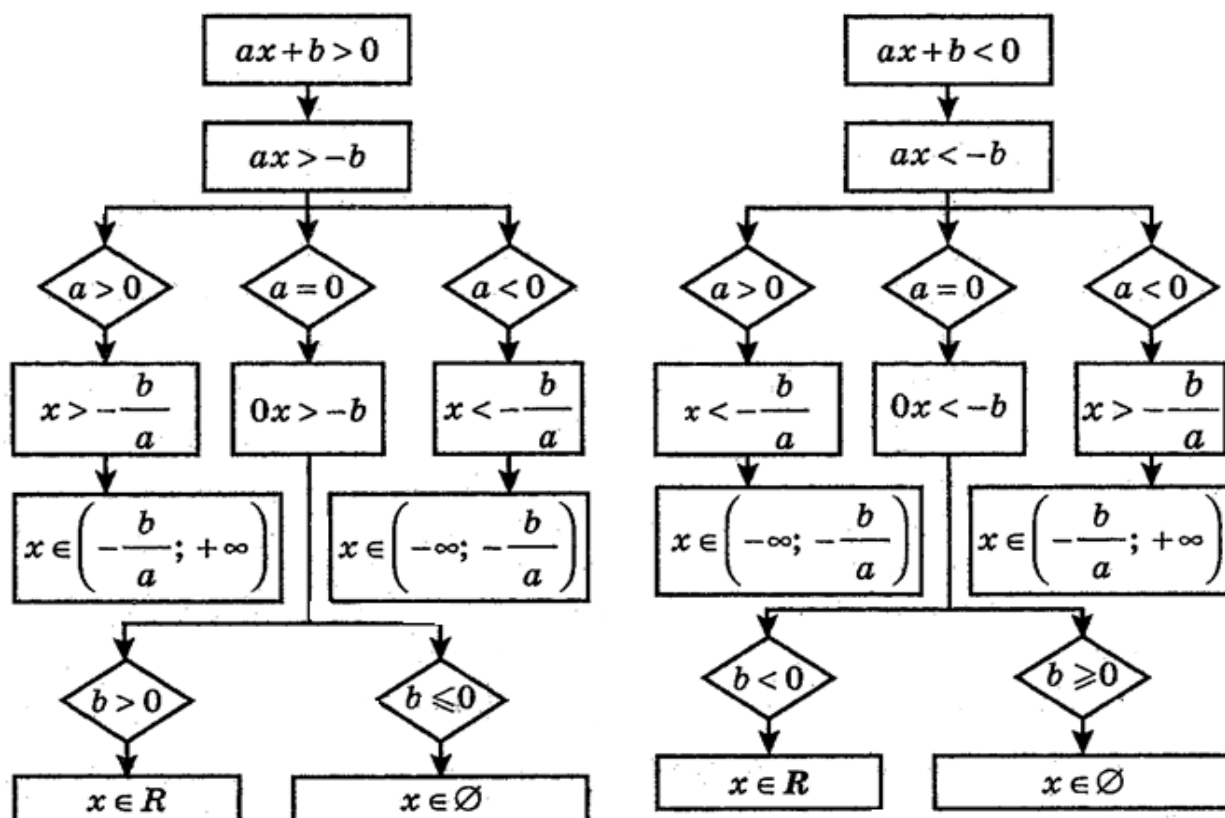
Наприклад, нерівності $\sqrt[3]{x^2+x} \leq \sqrt[3]{3-x}$ і $x^2+x \leq 3-x$ рівносильні.

5. Якщо перша нерівність рівносильна другій, а друга – третій, то перша нерівність рівносильна третій.

Лінійні нерівності з однією змінною

Лінійною нерівністю з однією змінною x називається нерівність виду $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$.

Схеми розв'язку лінійної нерівності



Нерівності другого степеня

Нерівностями другого степеня називаються нерівності виду:

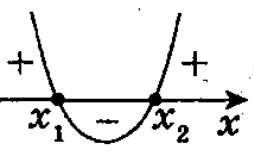
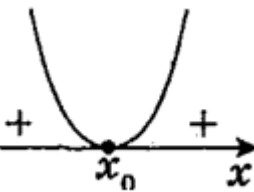
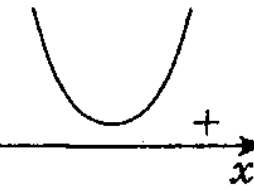
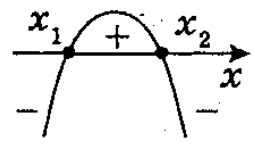
$$ax^2 + bx + c > 0,$$

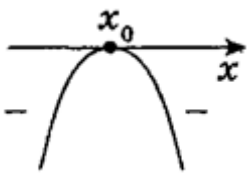
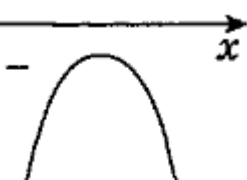
$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Розв'язання квадратичних нерівностей

Схема	Квадратична нерівність			
	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$a > 0, D > 0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$a > 0, D = 0$ 	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0
$a > 0, D < 0$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$a < 0, D > 0$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

$a < 0, D = 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$a < 0, D < 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

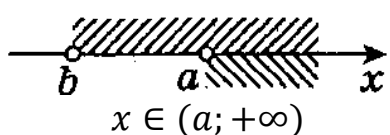
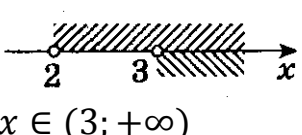
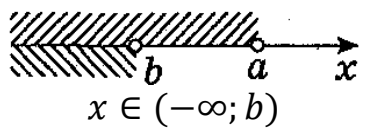
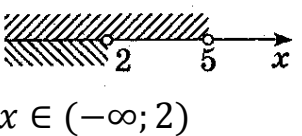
Системи лінійних нерівностей з однією змінною

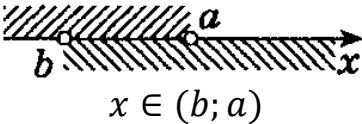
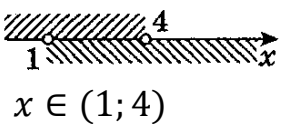
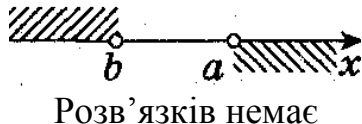
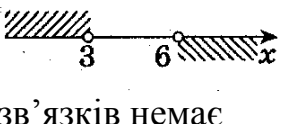
Системи виду: $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$

називаються **системами двох лінійних рівнянь з однією змінною**. (Замість знаків $>$, $<$ можуть бути знаки $\geq$, $\leq$.)

Щоб розв'язати систему нерівностей, треба кожен нерівність розв'язати окремо, а потім знайти розв'язок системи як перетин множин розв'язків нерівностей.

Можливі випадки розв'язку систем лінійних нерівностей

Системи лінійних нерівностей ($a > b$)	Розв'язок	Приклад
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 2)$

$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1; 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Розв'язків немає	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Розв'язків немає

Нерівності виду $f(x) \cdot g(x) > 0$ та $f(x) \cdot g(x) < 0$

Нерівність $f(x) \cdot g(x) > 0$ рівносильна двом системам:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Нерівність $f(x) \cdot g(x) < 0$ рівносильна двом системам:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Розв'язування подвійних нерівностей

Подвійна нерівність $f(x) < g(x) < h(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$$

Приклад : $-3 < 2x - 1 \leq 3$, $\begin{cases} 2x - 1 > -3, \\ 2x - 1 \leq 3; \end{cases} \begin{cases} 2x > -2, \\ 2x \leq 4; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x \leq 2. \end{cases}$

Тоді (рис.45) $x \in (-1; 2]$.

Відповідь : $(-1; 2]$.



Рис. 45

Дробові нерівності

Нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ рівносильна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ рівносильна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ рівносильна двом системам

нерівностей: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ рівносильна двом системам нерівностей:

$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Приклади розв'язання:

1. $\frac{x-2}{x-7} > 0$

1) $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-7 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x > 7. \end{cases}$ Тоді (рис. 46)

2) $\begin{cases} x-2 < 0, \\ x-7 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x < 7. \end{cases}$ Тоді (рис. 47)

Відповідь : $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$.

2. $\frac{2x-1}{3-x} \leq 0$

1) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 3-x > 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \leq 1, \\ x < 3; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0,5, \\ x < 3. \end{cases}$

Тоді (рис. 48) $x \in (-\infty; 0,5]$.

2) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 3-x < 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 1, \\ x > 3; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0,5, \\ x > 3. \end{cases}$

Тоді (рис. 49) $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь : $(-\infty; 0,5] \cup (3; +\infty)$.

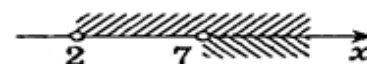


Рис. 46

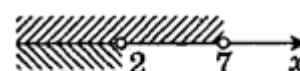


Рис. 47

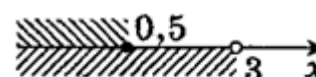


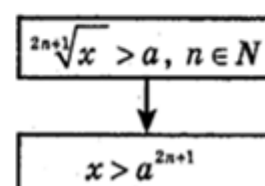
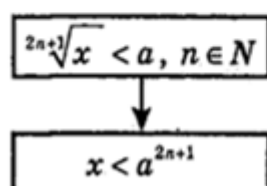
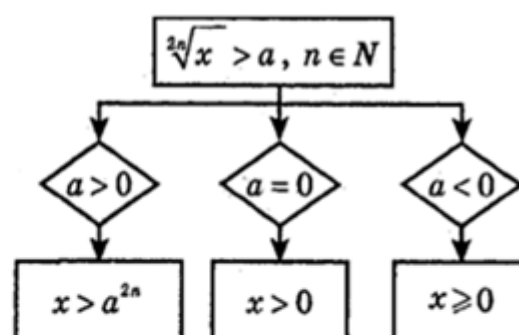
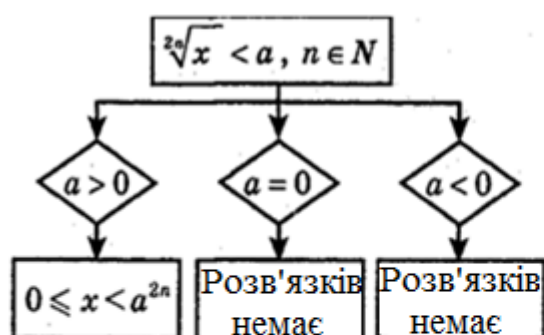
Рис. 48



Рис. 49

Ірраціональні нерівності

Найпростіші ірраціональні нерівності



Нерівності $\sqrt[n+1]{f(x)} > g(x)$ та $\sqrt[n+1]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, рівносильні нерівностям $f(x) > g^{2n+1}(x)$ та $f(x) < g^{2n+1}(x)$.

Приклад: $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 5x + 6} < x$, $x^3 + x^2 - 5x + 6 < x^3$,

$x^2 - 5x + 6 < 0$, $(x - 2)(x - 3) < 0$. Тоді (рис. 50)
 $x \in (2; 3)$.



Рис. 50

Нерівність $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, рівносильна системі
$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад: $\sqrt{4x - x^2} < 4 - x$,
$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 4x - x^2 < (4 - x)^2, \\ 4x - x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ 4x - x^2 < 16 - 8x + x^2, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 4, \\ 2x^2 - 12x + 16 > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 4, \\ x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ (x - 2)(x - 4) > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 4), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), \\ x \in [0; 4). \end{cases}$$
 Тоді (рис. 51) $x \in [0; 2)$.

Відповідь: $[0; 2)$.

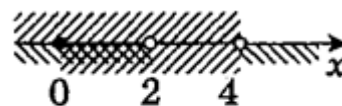


Рис. 51

Нерівність $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$, рівносильна об'єднанню систем

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 2x - 8.$$

$$1) \begin{cases} 2x - 8 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 > (2x - 8)^2; \end{cases} \begin{cases} x \geq 4, \\ 3x^2 - 27x + 60 < 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 4, \\ x^2 + 9x + 20 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 4 < x < 5 \end{cases}$$
 Тоді (рис. 52) $x \in (4; 5)$.



Рис. 52

$$2) \begin{cases} 2x - 8 < 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 4, \\ (x - 1)(x - 4) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 4), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty); \end{cases}$$

Тоді (рис. 53) $x \in (-\infty; 1]$.

Відповідь : $(-\infty; 1] \cup (4; 5)$.



Рис. 53

Нерівність $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $n \in \mathbb{N}$, рівносильне системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Приклад:

$$\sqrt{2x^2 - x - 6} \geq \sqrt{x^2 - 4}, \quad \begin{cases} 2x^2 - x - 6 \geq x^2 - 4, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 1) \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty). \end{cases}$$

Тоді (рис. 54) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

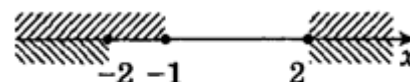
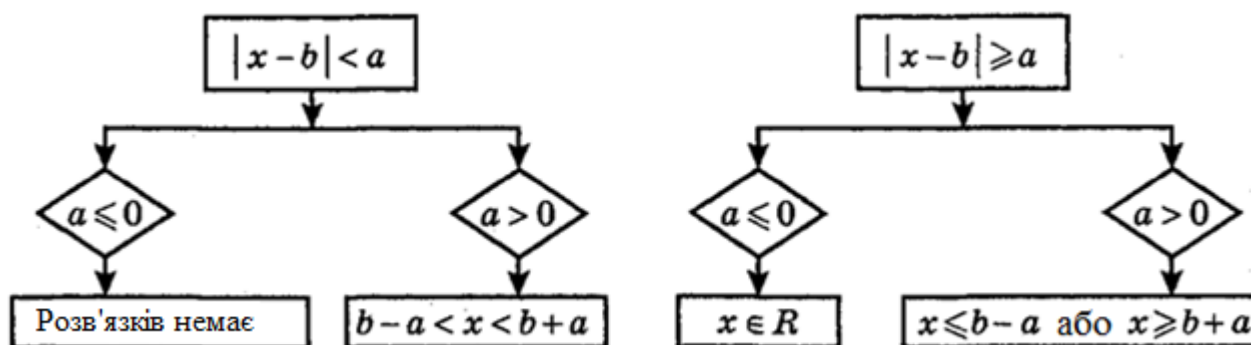


Рис. 54

Нерівності з модулем

Найпростіші нерівності з модулем



Нерівність $|f(x)| < a$ (де $a \geq 0$) рівносильна подвійній нерівності

$$-a < f(x) < a \text{ або системі } \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$$

Приклад: $|x^2 + 5x| < 6, -6 < x^2 + 5x < 6$ $\begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6; \end{cases} \begin{cases} x \in (-6; 1), \\ x \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty); \end{cases}$$

Тоді (рис. 55) $x \in (-6; -3) \cup (-2; 1)$.



Рис. 55

Відповідь: $(-6; -3) \cup (-2; 1)$.

Нерівність $|f(x)| > a$, де $a \geq 0$, рівносильна об'єднанню нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < -a, \\ f(x) > a. \end{cases}$$

Приклад: $|3 - x| > 2$, $\begin{cases} 3 - x > 2, \\ 3 - x < -2; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x > 5. \end{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty).$

Відповідь: $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty).$

Нерівність $|f(x)| > g(x)$ рівносильна об'єднанню нерівностей $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$

Приклад: $|3x - 2| > 2x + 1$, $\begin{cases} 3x - 2 > 2x + 1, \\ 3x - 2 < -2x + 1; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ 5x < 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3, \\ x < \frac{1}{5}; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x < 0,2. \end{cases} x \in (-\infty; 0,2) \cup (3; +\infty).$ Відповідь: $(-\infty; 0,2) \cup (3; +\infty).$

Нерівність $|f(x)| < g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

Приклад розв'язання: $|2x - 5| \leq x$, $\begin{cases} 2x - 5 \leq x, \\ 2x - 5 \geq -x; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5, \\ 3x \geq 5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 1\frac{2}{3}. \end{cases}$

Тоді (рис. 56) $x \in [1\frac{2}{3}; 5]$. Відповідь: $[1\frac{2}{3}; 5]$.



Рис. 56

Нерівність $|f(x)| > |g(x)|$ рівносильна нерівності $f^2(x) > g^2(x)$ або нерівності $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

Приклад: $|3 + x| \geq |x|$, $(3 + x)^2 \geq x^2$, $9 + 6x + x^2 \geq x^2$, $6x \geq -9$, $x \geq -\frac{9}{6}$,

$x \geq -1,5$.

Відповідь: $[-1,5; +\infty).$

Якщо нерівність містить кілька модулів, то знаходять значення x , при яких вираз, що стоїть під знаком модуля, дорівнює нулю. Знайдені значення x розбивають числову пряму на інтервали, на кожному з яких вираз під модулем зберігає знак. А потім на кожному інтервалі розкривають модулі і вирішують отриману систему. Об'єднання знайдених розв'язків становить множину розв'язків даної нерівності.

Приклад: $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$

Розглянемо три випадки (рис. 57).

$$1) \begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x < 0; \end{cases} x < 0;$$

$$2) \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x - 1 - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x < -2; \end{cases}$$

розв'язків немає ;

$$3) \begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x > 6; \end{cases} x > 6.$$

Відповідь : $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

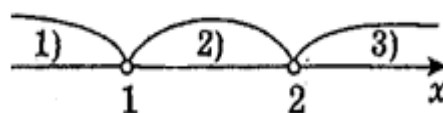


Рис. 57

Розв'язок раціональних нерівностей методом інтервалів

Щоб розв'язати нерівність $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), де

$$f(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_m)}{(x - a_{m+1})(x - a_{m+2}) \cdot \dots \cdot (x - a_n)},$$

треба:

1) зобразити числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ на координатній прямій (ці числа, розташовані в порядку зростання, розіб'ють координатну пряму на $n + 1$ проміжки, на яких функція $f(x)$ зберігає свій знак, тобто якщо a_i та a_k — сусідні точки, то для $x \in (a_i; a_k)$ функція зберігає знак);

2) визначити знаки функції $f(x)$ на кожному з проміжків;

3) записати відповідь.

Такий метод розв'язання нерівностей називається **методом інтервалів**.

Приклад:

$(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0$. Позначимо на координатній прямій нулі функції $(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3) = 0$, знайдемо знак функції на кожному проміжку.

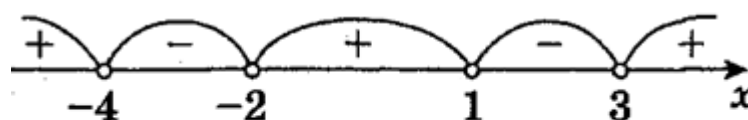


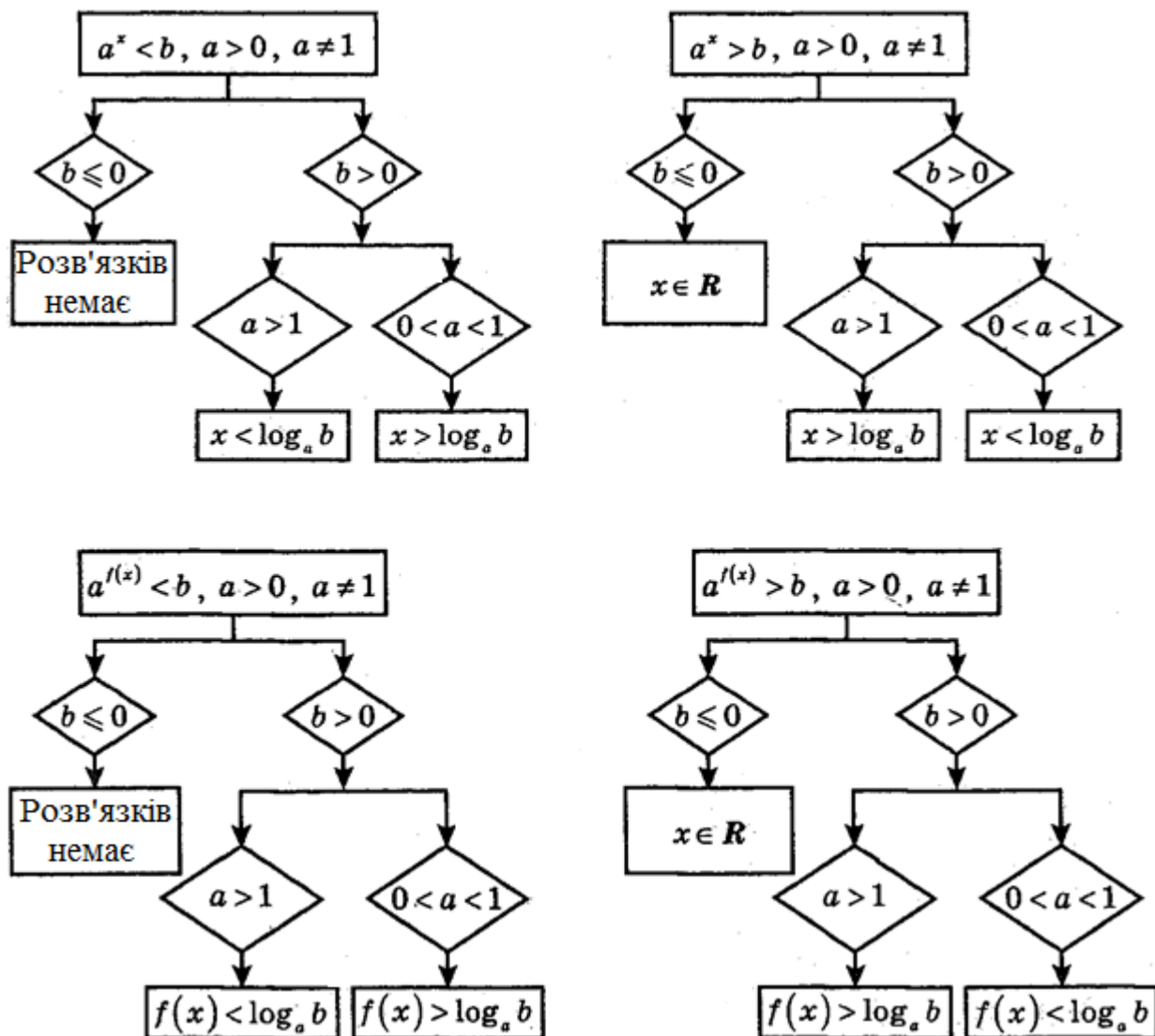
Рис. 58

На рис.58 видно, що $(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0$, якщо $x \in (-4; -2) \cup (1; 3)$.

Відповідь : $(-4; -2) \cup (1; 3)$.

Показникові нерівності

Найпростіші показникові нерівності



Нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)} (a^{f(x)} < a^{g(x)})$, якщо $a > 1$, рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$).

Нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)} (a^{f(x)} < a^{g(x)})$, якщо $0 < a < 1$, рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$).

Приклади:

$$1. 7^{8-x^2} \leq 7^{2x} \quad 8 - x^2 \leq 2x; -x^2 - 2x + 8 \leq 0; x^2 + 2x - 8 \geq 0;$$

$$(x + 4)(x - 2) \geq 0$$

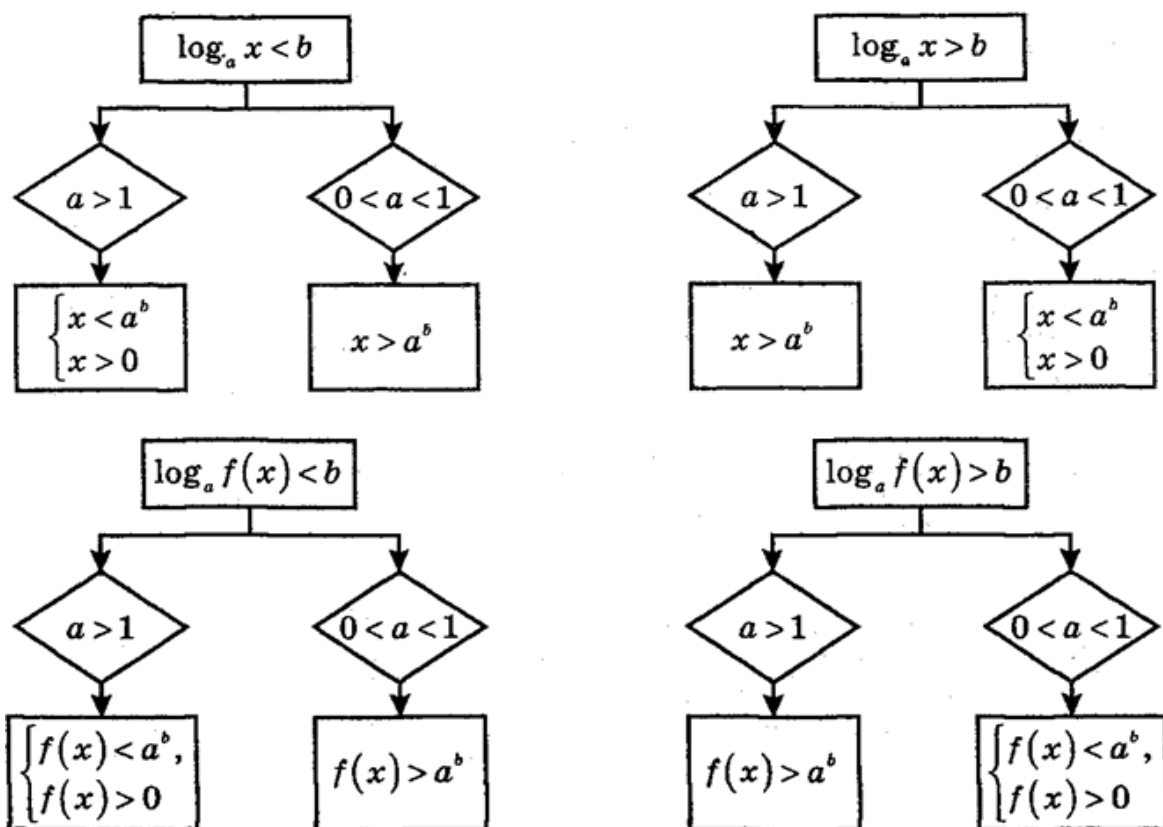
Звідси $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. Відповідь : $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

$$2. \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^{x^2-2} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^x; \quad x^2 - 2 \leq x; \quad x^2 - x - 2 \leq 0; \quad (x-2)(x+1) \leq 0.$$

Звідси $x \in [-1; 2]$. Відповідь. $[-1; 2]$.

Логарифмічні нерівності

Найпростіші логарифмічні нерівності



Нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна

- 1) системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ якщо $a > 1$;
- 2) системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ якщо $0 < a < 1$.

Приклад:

$$\log_8(5x - 8) < \log_8(2x + 7); \quad \begin{cases} 5x - 8 < 2x + 7, \\ 5x - 8 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 15, \\ 5x > 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x > 1,6. \end{cases}$$

Тоді (рис. 59) $x \in (1,6; 5)$. Відповідь : $(1,6; 5)$.

Нерівність $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$

рівносильно об'єднанню систем нерівностей



Рис. 59

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} h(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад: $\log_{x+1}(x+3) > 1$, $\log_{x+1}(x+3) > \log_{x+1}(x+1)$.

$$1) \begin{cases} x+1 > 1, \\ x+3 > x+1, \\ x+1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x+1 > 1, \\ 0x > -2; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ 0x > -2. \end{cases} \quad x > 0; x \in (0; +\infty).$$

$$2) \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 < 1, \\ x+3 > x+1, \\ x+3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x < 0, \\ 0x < -2, \\ x > -3. \end{cases}$$

Немає розв'язків, оскільки нерівність $0x < -2$ не має сенсу.

Відповідь : $(0; +\infty)$.

Метод інтервалів (узагальнений)

Використовується при розв'язанні нерівностей

$f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$. Метод заснований на тому, що неперервна на проміжку функція може змінювати знак тільки в тих точках, де її значення дорівнює нулю (але може і не змінювати) (рис. 60).

Розв'язуючи нерівність методом інтервалів, треба:

- 1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
- 2) знайти значення x , при яких функція дорівнює нулю (знайти нулі функції): $f(x) = 0$;

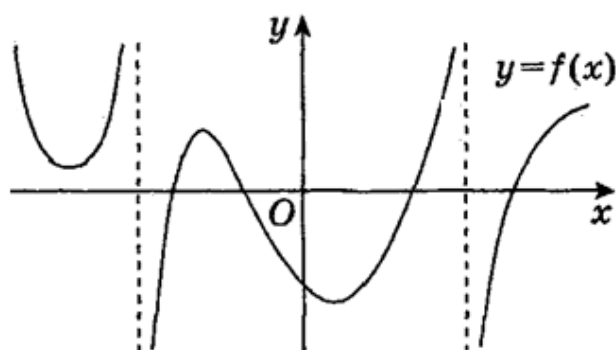


Рис. 60

- 3) розбити область визначення на проміжки, кожен з кінців якого є коренем рівняння $f(x) = 0$ або кінцевою точкою проміжку визначення функції $y = f(x)$;
- 4) визначити знак $f(x)$ на кожному з утворених проміжків;
- 5) об'єднати проміжки, на яких функція $f(x)$ задовольняє нерівності, на множині розв'язків.

Приклад:

$$(3x - 6) \log_{0,5} x > 0.$$

Нехай $y = (3x - 6) \log_{0,5} x$. $D(y) = (0; +\infty)$. Знайдемо нулі функції:

$$(3x - 6) \log_{0,5} x = 0; \quad \begin{cases} 3x - 6 = 0, \\ \log_{0,5} x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точками 2 і 1 і знайдемо знаки функції на кожному проміжку.

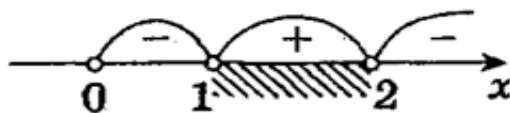


Рис. 61

Отже (рис. 61), $x \in (1; 2)$. Відповідь: $(1; 2)$.

Графічний спосіб розв'язання нерівностей з однією змінною

Для графічного розв'язку нерівності $f(x) > g(x)$ потрібно побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ і вибрати ті проміжки осі абсцис, на яких графік функції $y = f(x)$ розташований вище графіка функції $y = g(x)$.

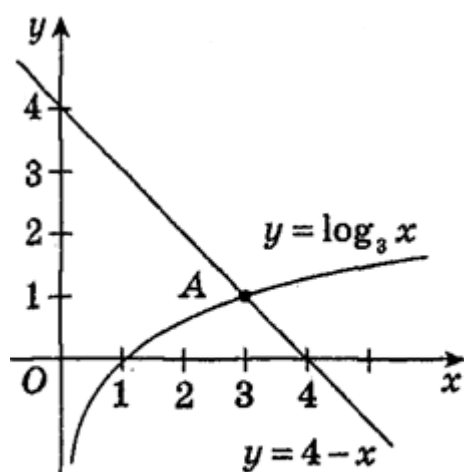


Рис. 62

Приклад: $\log_3 x \leq 4 - x$.

Побудуємо графіки функції $y = \log_3 x$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат. Графіки перетинаються в точці A з абсцисою $x = 3$.

З рис. 62 видно, що множиною розв'язків даної нерівності є проміжок $(0; 3]$.

Відповідь: $(0; 3]$.

Тригонометричні нерівності

Розв'язання нерівностей $\sin t > a$, $\sin t < a$

Нерівність	Значення		
	$a < -1$	$-1 \leq a < 1$	$a \geq 1$
$\sin t > a$	$t \in R$	$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n,$ $n \in Z$	Розв'язків немає
Нерівність	Значення		
	$a \leq -1$	$-1 < a \leq 1$	$a > 1$
$\sin t < a$	Розв'язків немає	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n,$ $n \in Z$	$t \in R$

Розв'язання нерівностей $\cos t > b$, $\cos t < b$

Нерівність	Значення		
	$b < -1$	$-1 \leq b < 1$	$b \geq 1$
$\cos t > b$	$t \in R$	$-\arccos b + 2\pi n < t < \arccos b + 2\pi n,$ $n \in Z$	Розв'язків немає
Нерівність	Значення		
	$b \leq -1$	$-1 < b \leq 1$	$b > 1$
$\cos t < b$	Розв'язків немає	$\arccos b + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos b + 2\pi n,$ $n \in Z$	$t \in R$

Розв'язання нерівностей $\operatorname{tg} t > a$, $\operatorname{tg} t < a$

Нерівність	$a \in R$
$\operatorname{tg} t > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\operatorname{tg} t < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$

Розв'язання нерівностей $\operatorname{ctg} t > a$, $\operatorname{ctg} t < a$

Нерівність	$a \in R$
$\operatorname{ctg} t > a$	$\pi n < t < \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$
$\operatorname{ctg} t < a$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n < t < \pi + \pi n, n \in Z$

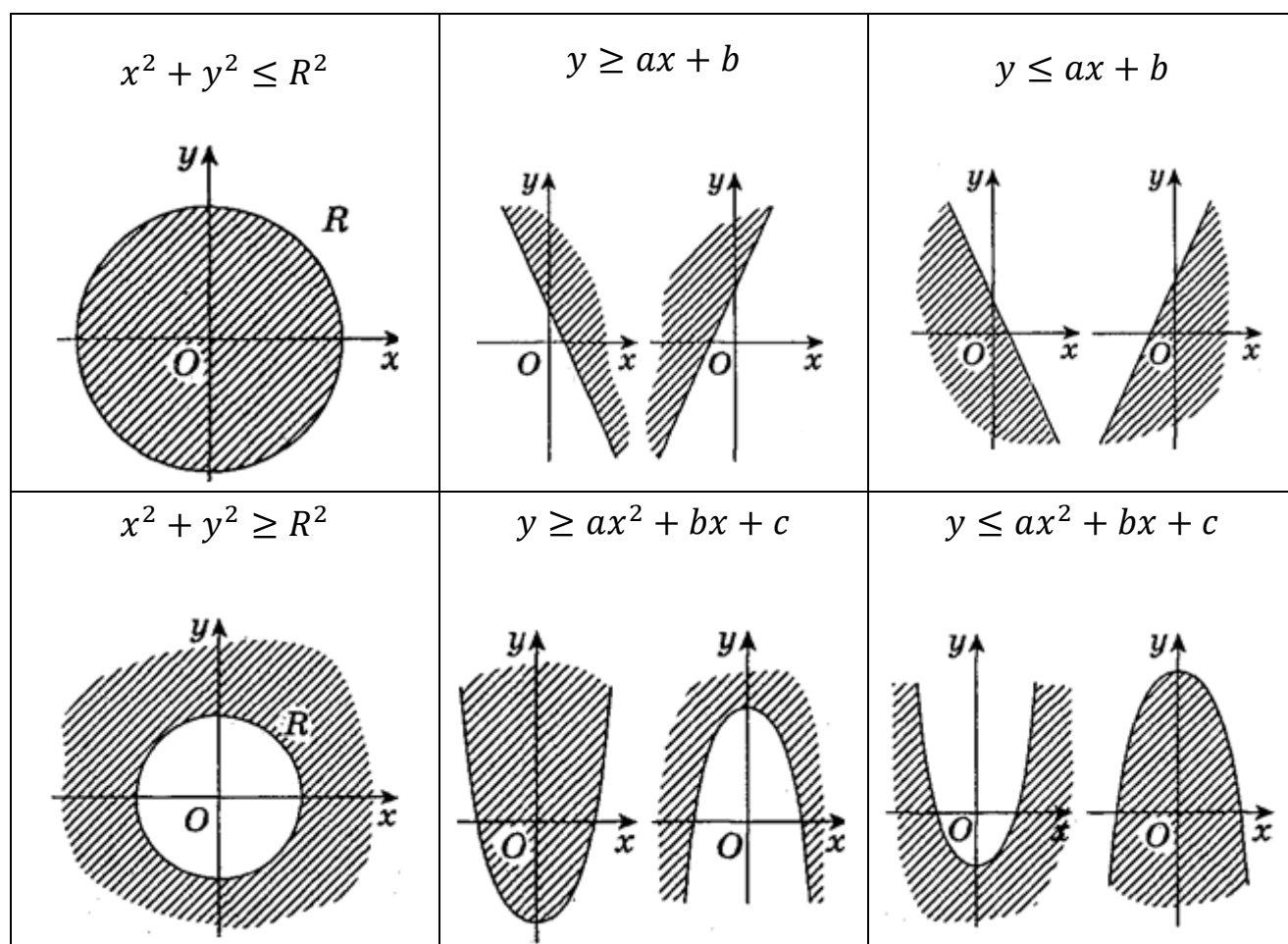
Нерівності з двома змінними

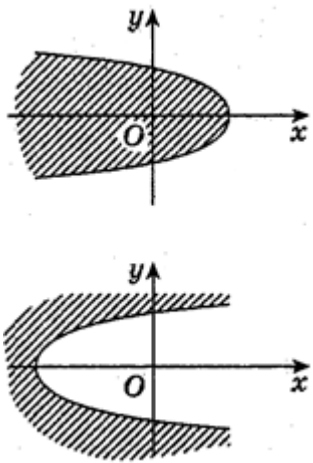
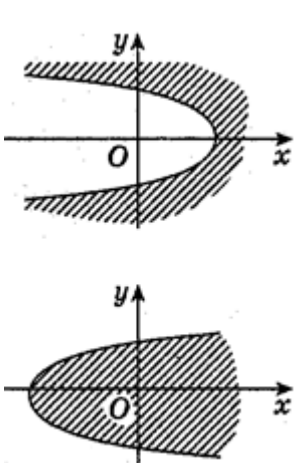
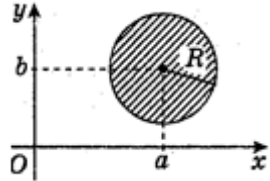
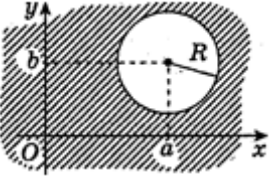
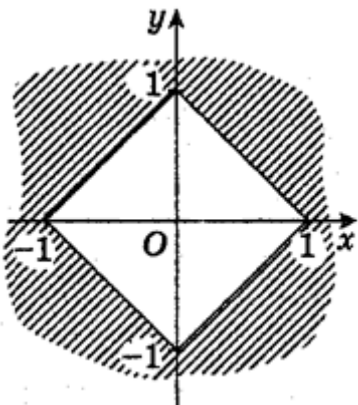
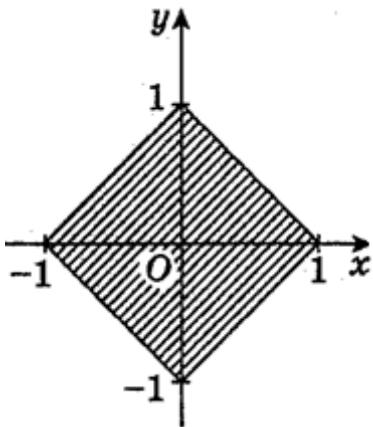
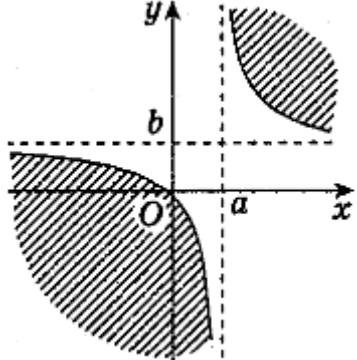
7.2. Розв'язки і графіки нерівностей з двома змінними

Розв'язком нерівності $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$, $f(x, y) \geq 0$, $f(x, y) \leq 0$) називається упорядкована пара чисел, яка перетворює її в правильну числову нерівність.

Графіком нерівності з двома змінними x та y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де кожна пара $(x; y)$ є розв'язком даної нерівності.

Графіки деяких нерівностей



$x \leq ay^2 + by + c$ 	$x \geq ay^2 + by + c$ 	$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \geq R^2$ 
$ x + y \geq 1$ 	$ x + y \leq 1$ 	$(x - a)(y - b) > k, \quad k \neq 0$ 

Графічний спосіб розв'язування систем нерівностей з двома змінними

Щоб побудувати на координатній площині розв'язок системи нерівностей, треба:

- 1) виконати рівносильні перетворення системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх нерівностей, які входять в систему;
- 2) побудувати ці графіки і знайти перетин областей.

Перетин областей являє собою розв'язок системи нерівностей.

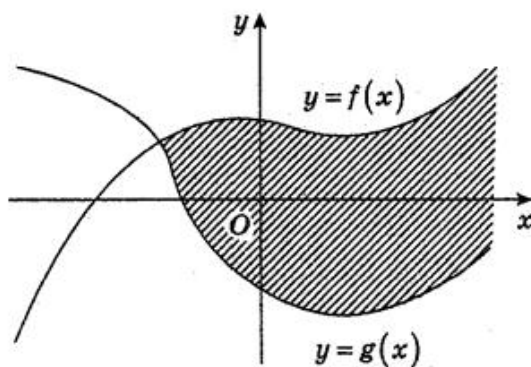


Рис. 63

Система $\begin{cases} y \leq f(x), \\ y \geq g(x) \end{cases}$ має розв'язок, а саме — множину точок, які належать заштрихованій області (рис. 63).

Приклад.

Знайдемо множину розв'язків системи $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$

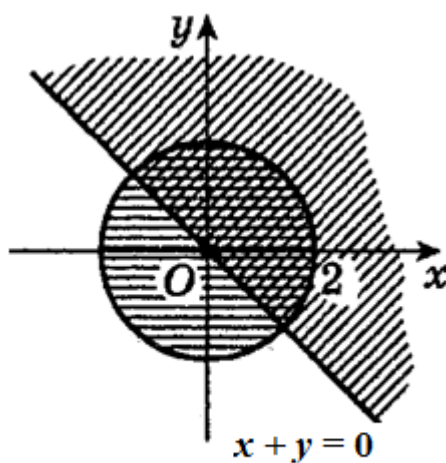


Рис. 64

Множиною розв'язків першої нерівності є коло з радіусом 2 і центром в початку координат. Множина розв'язків другої нерівності є півплощина. Множиною розв'язків системи є перетин цих множин, тобто півколо (рис. 64).

7.3. Числові послідовності

Означення числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність дійсне число a_n , то кажуть, що задана *числова послідовність*:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

Отже, числова послідовність — функція натурального аргументу.

Число a_1 називають *першим членом послідовності*, число a_2 — другим членом послідовності, число a_3 — третім і т. д. Число a_n називають *n -м членом* цієї послідовності, а натуральне число n — його *номером*. З двох сусідніх членів $a_i; a_{i+1}$ послідовностей член a_{i+1} називають *наступним* (по відношенню до a_i), а a_i — *попереднім* (по відношенню до a_{i+1}).

Способи задання послідовності

Послідовність часто задають за допомогою формули n -го члена, тобто формулою, яка дозволяє визначати члени послідовності за їхніми номерами.

Наприклад, якщо послідовність задана формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$, то перші п'ять її членів відповідно рівні:

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{4}; a_4 = \frac{4}{5}; a_5 = \frac{5}{6}.$$

Послідовність можна задати формулою, що виражає будь-який член послідовності, починаючи з деякого, через попередні (один або декілька) члени.

Наприклад, якщо $a_1 = 1$, а $a_{n+1} = a_n + 5$, то перші п'ять послідовностей відповідно рівні: $a_1 = 1$; $a_2 = a_1 + 5 = 1 + 5 = 6$; $a_3 = a_2 + 5 = 6 + 5 = 11$; $a_4 = a_3 + 5 = 11 + 5 = 16$; $a_5 = a_4 + 5 = 16 + 5 = 21$.

Види послідовностей

Послідовності бувають скінченні і нескінченні.

Послідовність називається скінченною, якщо вона має кінцеву кількість членів.

Наприклад, послідовність двозначних натуральних чисел: $10; 11; 12; \dots, 98; 99$ скінченна.

Послідовність називається зростаючою, якщо кожний її член, починаючи з другого, більше попереднього.

Наприклад, послідовність $2; 4; 6; 8; \dots; 2n; \dots$ зростаюча.

Послідовність називається спадною, якщо кожен її член, починаючи з другого, менше попереднього.

Наприклад, послідовність $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ спадна.

7.4. Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називається послідовність $a_1; a_2; a_3; \dots$, кожний наступний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного і того ж числа d , яке називається *різницею арифметичної прогресії*: $a_{n+1} = a_n + d, n \in N$.

В арифметичній прогресії n -й член визначається за формулою

$a_n = a_1 + d(n - 1)$, де n - номер члена, a_n - n -й член, a_1 - перший член, d - різниця прогресії.

Наприклад, якщо $a_1 = 4, d = 4$, то $a_{100} = a_1 + 99d = 4 + 99 \cdot 4 = 397$.

Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Якщо всі члени деякої послідовності, починаючи з другого, задовольняють умові $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то ця послідовність є *арифметичною прогресією*.

Сума перших n членів арифметичної прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Суму перших n членів арифметичної прогресії можна знайти і за формулою

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

Наприклад, $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$;

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{2 \cdot 1 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (1 + n - 1) \cdot n = n^2.$$

7.5. Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називається послідовність $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots$, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q ($q \neq 0, |q| \neq 1, b_1 \neq 1$), яке називається *знаменником геометричної прогресії*:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad \text{де } b_1 \neq 0, \quad q \neq 0, \quad |q| \neq 1, \quad n \in N.$$

У геометричній прогресії n -й член визначається за формулою $b_n = b_1 q^{n-1}$, де n — номер члена, b_n — n -й член, b_1 — перший член, q — знаменник прогресії.

Наприклад, якщо $b_1 = 64, q = \frac{1}{2}$, то $b_7 = b_1 q^6 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1$.

Модуль кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \quad (\text{або } b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}).$$

Якщо всі члени числової послідовності, починаючи з другого, задовольняють умові $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ (або $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$), то дана послідовність є *геометричною прогресією*.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{32} + \left(-\frac{1}{64}\right) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{2}{3} = \frac{21}{64}. \end{aligned}$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Нескінченно спадна геометрична прогресія — це нескінченна геометрична прогресія, знаменник якої q по модулю менше 1, тобто $|q| < 1$.

Сума всіх членів нескінченної спадної геометричної прогресії

$S = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + \dots$,
кінцеве число, яке визначається за формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$.

7.6. Границя функції

Границя функції $y = f(x)$, якщо $x \rightarrow \infty$

Число b називається **границею функції** $y = f(x)$ коли $x \rightarrow +\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке число $M > 0$, що для всіх $x > M$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записують так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Наприклад, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться таке від'ємне число $M < 0$, що для всіх x таких, що $x < M$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.

Для обчислення границь функцій при $x \rightarrow +\infty$ використовують такі теореми:

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = ab$.

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Границя функції в точці

Якщо функція $y = f(x)$ визначена в деякій окіл точки $x = a$, крім, можливо, самої точки a , то число A називається границею функції

$y = f(x)$ при x , яке прямує до a , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x , що задовольняють умові

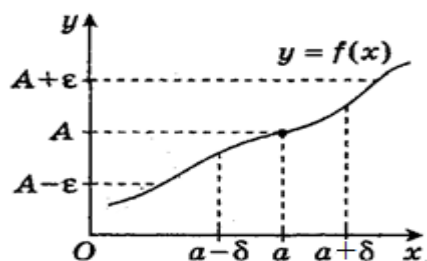


Рис. 65

$0 < |x-a| < \delta$, має місце нерівність

$|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 65). Записується так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$, коли $x \rightarrow a$.

Іншими словами, число A є границею функції $y = f(x)$ коли $x \rightarrow a$, якщо для всіх x , досить близьких до числа a і відмінних від нього, відповідні їм значення функції $y = f(x)$ як завгодно близько прямують до числа A .

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5) = 4$.

Теорема про границі функцій

1. Функція не може мати в одній точці дві різних границі.
2. Границя постійної величини дорівнює цій постійній: $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B; \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ якщо } B \neq 0; \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = A^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA, \text{ де } c \text{ — стала.}$$

7.7. Неперервні функції

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Функція $y = f(x)$ в точці $x = a$ буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

- 1) функція $y = f(x)$ визначена в точці $x = a$, тобто існує $f(a)$;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ функції в точці $x = a$;
- 3) границя функції в точці $x = a$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Іншими словами, функція $y = f(x)$ **неперервна в точці** $x = a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x , таких що $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - g(a)| < \varepsilon$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку, то її називають *неперервною на даному проміжку*.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною у точці x_0 , якщо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Число Δx називають приростом аргументу у точці x_0 , а число

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приростом функції $f(x)$ у точці x_0 .

Теорема про неперервність функції

1. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці $x = a$, то в цій точці будуть неперервними і функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$.

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x = a$ і $g(a) \neq 0$, то

в точці $x = a$ буде неперервною також і функція $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Виходячи з теорем 1 і 2, можна стверджувати:

1) многочлен $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ — неперервна функція в будь-якій точці $a \in R$;

2) функція $y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$ неперервна в усіх точках числової осі, крім тих точок, в яких знаменник дорівнює нулю;

3) функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = |x|$

також неперервні у всіх точках області визначення.

7.8. Обчислення границі функції в точці

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x = a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \operatorname{tg} x} = \frac{\sin 0}{\cos^2 0 + \operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Якщо в результаті підстановки $x = a$ при знаходженні границі отримуємо вираз типу $\frac{0}{0}$, то треба:

- 1) спробувати розкласти чисельник і знаменник дробу на множники, виконати скорочення, а потім знаходити границю;
- 2) позбутися ірраціональності в знаменнику, знаходити границю;
- 3) скористатися тим, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{2-3}{2-10} = \frac{1}{8};$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{mx}{nx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin nx}{nx}} = 1 \cdot \frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

7.9. Похідна, означення похідної

Приріст аргументу і приріст функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точках x_0 та $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Різниця $x_1 - x_0 = \Delta x$ називається *приростом аргументу*, а

$$\text{Різниця } f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

називається *приростом функції* при переході від значення аргументу x_0 до аргументу $x_1 = x_0 + \Delta x$ (рис. 66). Приріст функції позначається Δf або Δy , тобто $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Наприклад, якщо $f(x) = x^2$, то

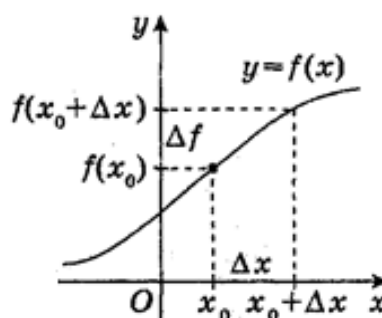


Рис. 66

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Означення похідної

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0

(позначають $f'(x_0)$) називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

де $\Delta x = x_1 - x_0$ — приріст аргументу; x_1 та x_0 — два значення незалежної змінної з області визначення функції $f(x)$; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ — приріст функції в точці x_0 .

Наприклад, якщо

$$\begin{aligned} f(x) = 3x^2 + 2, \text{ то } f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x_0 + \Delta x)^2 + 2 - 3x_0^2 - 2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) - 3x_0^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0 + 3\Delta x) = 6x_0 + 0 = 6x_0. \end{aligned}$$

Функція, яка має похідну в точці x_0 , називається *диференційованою в цій точці*.

Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що вона *диференційована на цьому проміжку*.

Похідна функції $f(x)$, диференційованої на проміжку, сама є функцією аргументу x .

Для знаходження похідної функції $f'(x)$ користуються правилами і формулами диференціювання.

7.10. Основні правила диференціювання

1. Похідна суми дорівнює сумі похідних: $(u + v)' = u' + v'$.
2. Похідна добутку дорівнює сумі добутку похідної однієї функції на другу функцію: $(uv)' = u'v + uv'$.
3. Постійний множник можна виносити за знак похідної: $(Cu)' = Cu'$.
4. Похідна частки обчислюється за формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, за умови, що $v \neq 0$.
5. Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної функції по проміжному аргументу на похідну цього аргументу за незалежною змінною $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; тобто якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$ або $y'_x = y'_u \cdot y'_x$.

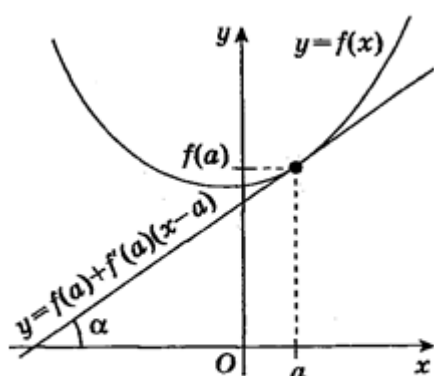
Таблиця похідних

Похідні елементарних функцій	Похідні складних функцій
$C' = 0, x' = 1; (kx + b)' = k;$ $(x^n)' = nx^{n-1};$ $(e^x)' = e^x;$ $(a^x)' = a^x \ln a;$ $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ $(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$ $(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$ $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ $(ctg x)' = \frac{1}{\sin^2 x};$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(kx + b)' = k \cdot u';$ $(x^n)' = nx^{n-1} \cdot u';$ $(e^x)' = e^x \cdot u';$ $(a^x)' = a^x \ln a \cdot u';$ $(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$ $(\lg u)' = \frac{1}{u} \lg e \cdot u'; (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$ $(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 x};$ $(ctg u)' = \frac{u'}{\sin^2 u};$ $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$

$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$
$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$
$(x^x)' = x^x(1 + \ln x);$	$(u^u)' = u^u(1 + \ln u)u';$

7.11. Геометричний зміст похідної

Нехай задана функція $y = f(x)$, яка має похідну в точці $x = a$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ через точку $(a; f(a))$, тоді кутовий коефіцієнт або тангенс кута між дотичною і додатним напрямом осі Ox буде дорівнювати похідній функції $y = f(x)$ в точці



$x = a$, тобто $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ в точці $x = a$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в цій точці: $f'(a) = k = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 67).

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Наприклад, рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x$ в точці $x = 1$ має вигляд: $y = -3 - 2(x - 1)$ або $y = -1 - 2x$, оскільки $f(a) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3$; $f'(x) = 2x - 4$; $f'(a) = f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$.

Механічний зміст похідної

Якщо точка рухається уздовж осі Ox і її координата змінюється за законом $x = x(t)$, то миттєва швидкість точки

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а прискорення

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t),$$

Наприклад, якщо тіло рухається за законом

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^2 + 7t + 12,$$

то його швидкість буде змінюватися за законом

$$v(t) = (x(t))' = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^2 + 7t + 12 \right)' = t^3 - t^2 + \frac{1}{6}t + 7,$$

а прискорення точки буде змінюватися за законом

$$a(t) = v'(t) = \left(t^3 - t^2 + \frac{1}{6}t + 7 \right)' = 3t^2 - 2t + \frac{1}{6}.$$

7.12. Застосування похідної при дослідженні функцій і побудові графіків функцій

Достатня умова зростання (спадання) функції

Достатня умова зростання функції. Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає на цьому інтервалі (рис. 68, а).

Достатня умова спадання функції. Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ спадає на цьому інтервалі (рис. 68, б). Необхідна і достатня умова сталості функції. Функція $f(x)$ постійна на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в кожній точці цього інтервалу (рис. 68, в).

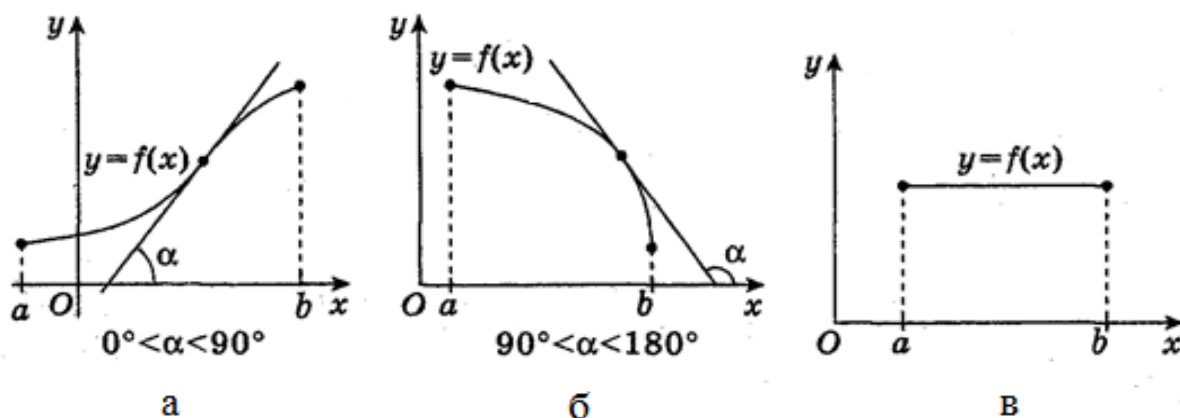
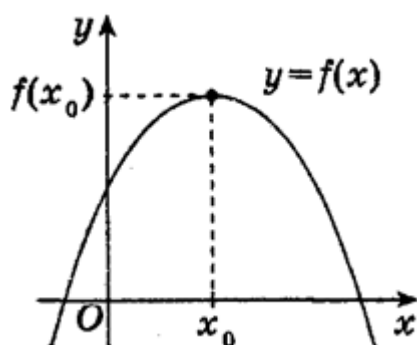


Рис. 68

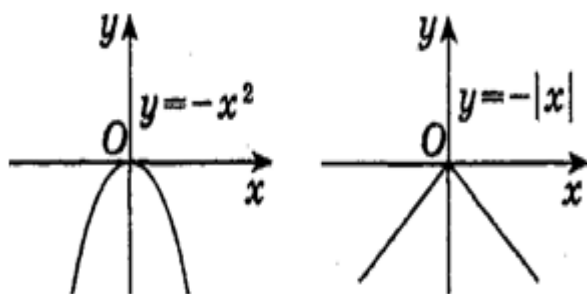
Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точка максимуму

Точка x_0 називається точкою максимуму (локального максимуму) функції $y = f(x)$, якщо знайдеться такий окіл точки x_0 , що для всіх x з цього околу виконується умова $f(x_0) \geq f(x)$

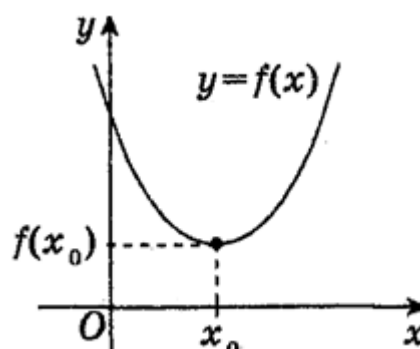


x_0 — точка максимуму функції $f(x)$; $f(x_0)$ — максимум функції $f(x)$.
Наприклад, $x = 0$ є точкою максимуму для функцій $y = -x^2$ та $y = -|x|$.

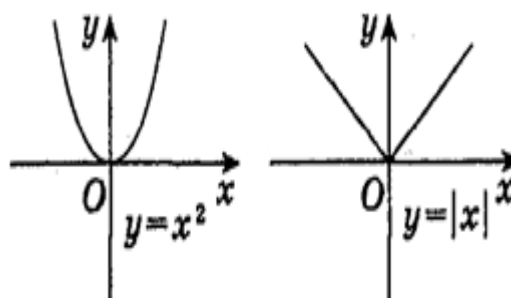


Точка мінімуму

Точка x_0 називається **точкою мінімуму (локального мінімуму)** функції $y = f(x)$, якщо знайдеться такий окіл точки x_0 , що для всіх x з цього околу виконується умова $f(x_0) \leq f(x)$



x_0 — точка мінімуму функції $f(x)$; $f(x_0)$ — мінімум функції $f(x)$.
Наприклад, $x = 0$ є точкою мінімуму для функцій $y = x^2$ та $y = |x|$.

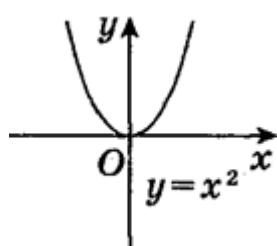


Точки максимуму і точки мінімуму називаються *точками екстремуму*; позначаються так: x_{max} , x_{min} .

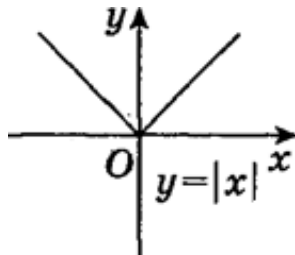
Значення функції в точках мінімуму і максимуму називаються *екстремумами функції*, позначаються так: y_{min} , y_{max} або f_{min} , f_{max} .

7.13. Необхідна умова екстремуму

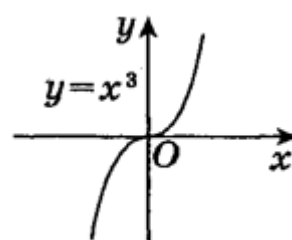
Якщо x_0 — точка екстремуму функції $y = f(x)$, то в цій точці похідна дорівнює нулю або не існує



$f'(0) = 0, x = 0$
точка екстремуму



— $f'(0)$ — не існує, $x = 0$
— точка екстремуму



$f'(0) = 0$, але $x = 0$ не
є точкою екстремуму

Достатні умови екстремуму

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак в цій точці, то x_0 — точка екстремуму функції $y = f(x)$.

Якщо у точці x_0 знак $f'(x)$
змінюється з «+» на «-», то
 x_0 — точка максимуму

Якщо у точці x_0 знак $f'(x)$
змінюється з «-» на «+», то
 x_0 — точка мінімуму

7.13.Схема дослідження функції на монотонність і екстремуми

1. Знайти область визначення і інтервали, на яких функція неперервна.
2. Знайти похідну.
3. Знайти критичні точки, тобто внутрішні точки області визначення, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення.

5. Визначити щодо кожної критичної точки, чи є вона точкою максимуму, мінімуму або не є точкою екстремуму.

6. Записати результат дослідження функції: проміжки монотонності і екстремуми.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^4 - 4x^3$ на монотонність і екстремуми.

Розв'язок.

$D(y) = \mathbb{R}$. Функція неперервна на $\mathbb{R}$.

$$y' = (x^4 - 4x^3)' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Знаходимо критичні точки: $D(y) = \mathbb{R}$; $y' = 0$, $4x^2(x - 3) = 0$, $x = 0$ $x = 3$.

Відмічаємо критичні точки на координатну пряму (рис. 69) і визначаємо знак похідної, та характер поведінки функції:



Рис. 69

(Знаками $\searrow$ і $\nearrow$ відповідно позначають спадання і зростання функції.)

Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty; 3)$, зростає на проміжку $(3; +\infty)$;

$x = 3$ — точка мінімуму $y_{\min} = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

Відповідь. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 3)$, зростає на проміжку $(3; +\infty)$; $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = -27$.

7.15. Схема знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на проміжку

Для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ її найбільше (або найменше) значення досягається або в критичних точках, або на кінцях проміжку.

Тому, щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$, необхідно обчислити значення функції у всіх критичних точках, що належать проміжку $(a; b)$, і на кінцях проміжку для $x = a$, $x = b$, а потім серед отриманих чисел вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x + e^{-x}$ на відріжку $[-1; 2]$.

Розв'язок

Знаходимо $f'(x)$: $f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x}$.

Знаходимо критичні точки: $f'(x) = 0$; $1 - e^{-x} = 0$; $e^{-x} = 1$; $x = 0$.

Знаходимо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка:

$$f(0) = 0 + e^0 = 1; f(-1) = -1 + e^1 = e - 1; f(2) = 2 + e^{-2} = 2 + \frac{1}{e^2}.$$

$$f_{\text{найб}} = f(2) = 2 + \frac{1}{e^2}; f_{\text{найм}} = f(0) = 1.$$

$$\text{Відповідь. } f_{\text{найб}} = f(2) = 2 + \frac{1}{e^2}; f_{\text{найм}} = f(0) = 1.$$

7.16. Схема дослідження функції. Побудова графіка функції

1. Знайти область визначення функції.
2. З'ясувати специфічні ознаки: чи є функція парною або непарною, періодичною.
3. Знайти точки перетину графіка з осями координат.
4. Визначити проміжки знакосталості.
5. З'ясувати проміжки монотонності функції.
6. Знайти точки екстремуму і значення функції в цих точках.
7. Дослідити поведінку функції в околі «особливих» точок і при великих за модулем x .
8. Побудувати схематично графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ і побудувати її графік.

Розв'язок

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Функція ні парна, ні непарна.

Знаходимо абсциси точок перетину графіка з віссю Ox :

$$x^3 - 3x^2 = 0; x^2(x - 3) = 0; x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Знаходимо ординату точки перетину графіка з віссю Oy :

$$y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0.$$

Знаходимо похідну: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

$$D(f') = R.$$

Знаходимо критичні точки: $3x(x - 2) = 0; x = 0 \text{ або } x = 2$.

Складаємо таблицю:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	−4	$\nearrow$
		$\max$		$\min$	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty.$$

Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції

$$y = x^3 - 3x^2 \text{ (рис. 70).}$$

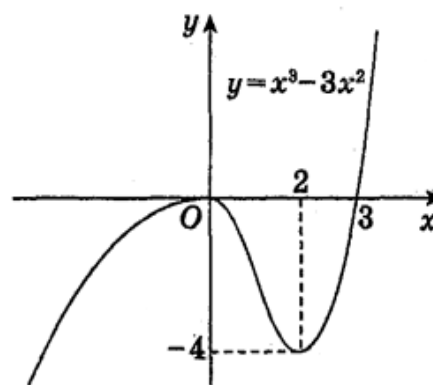


Рис. 70

7.17. Первісна, невизначений інтеграл

Первісна

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ — первісна для функції $F(x) = 2x$, оскільки

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x).$$

Основна властивість первісної

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на заданому проміжку, то функція

$f(x)$ має безліч первісних, і всі ці первісні можна записати у вигляді

$F(x) + C$, де C — довільна стала.

Наприклад, функції $F(x) = x^2 + C$ є первісною для функції $f(x) = 2x$, оскільки

$$F'(x) = (x^2 + C)' = 2x = f(x).$$

Правила обчислення первісних

1. Первісна суми функцій дорівнює сумі первісних функцій: тобто якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а $G(x)$ — первісна для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первісна функції $f(x) + g(x)$.
2. Постійний множник можна виносити за знак первісної, тобто якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ і C — стала, то $CF(x)$ — первісна для $Cf(x)$.
3. Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$ і $k \neq 0$, b — стала, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.

Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається вираз $F(x) + C$, тобто сукупність всіх первісних даної функції $f(x)$.

Позначається так: $\int f(x)dx = F(x) + C$, де функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; вираз $f(x)dx$ — підінтегральним виразом;

$F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$; C — довільна стала.

Основні правила інтегрування

$$1. \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$2. \int cf(x)dx = \int cf(x)dx.$$

3. Якщо $k \neq 0$ та k, b — постійні, то $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$.

Таблиця первісних і таблиця невизначених інтегралів

Таблиця первісних

Функція $f(x)$	Первісні $F(x)+C$
0	C
1	$x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$ або $-\operatorname{arcctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ або $-\arccos x + C$

Таблиця невизначених інтегралів
$\int 0dx = C;$
$\int dx = x + C;$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$
$\int \cos x dx = \sin x + C;$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
$\int e^x dx = e^x + C;$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

7.18. Визначений інтеграл та його застосування

Визначений інтеграл

Нехай задана неперервна функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $[a; b]$, тоді визначеним інтегралом від a до b функції $f(x)$ називається приріст первісної

$F(x)$ цієї функції, тобто $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою границями інтегрування.

Основні правила обчислення визначеного інтеграла

$$1. \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, \text{ де } c — \text{постійна.}$$

$$2. \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

$$4. \int_a^b f(kx + l)dx = \frac{1}{k} \int_{ka+l}^{kb+l} f(x)dt.$$

$$5. \int_a^b f(x)dx = 0.$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Площа S криволінійної трапеції (фігура, обмежена графіком неперервної додатної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$)

обчислюється за формулою $\int_a^b f(x)dx$ (рис. 71).

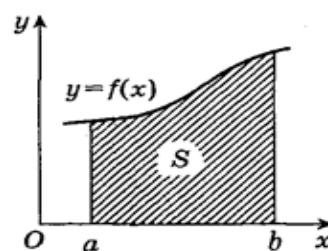


Рис. 71

Фізичний зміст визначеного інтеграла

При прямолінійному русі переміщення s

чисельно дорівнює $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, де

$v(t)$ —швидкість руху (рис. 72).

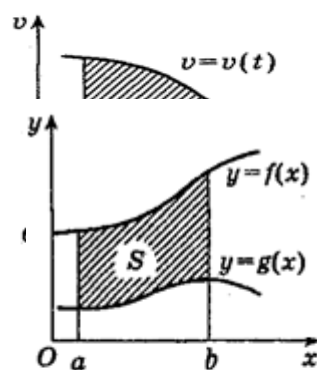


Рис. 73

Площа фігури

Якщо на заданому проміжку $[a; b]$ неперервні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають властивість $f(x) \geq g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (рис. 73).

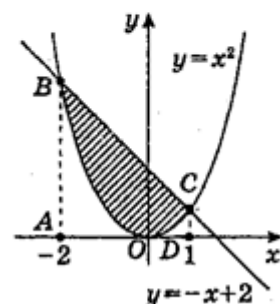


Рис. 74

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 \text{ і } y = -x + 2.$$

Розв'язок.

Зобразимо схематично графіки даних функцій і заштрихуємо фігуру, площу якої необхідно знайти

(рис. 74). Для знаходження границь інтегрування розв'яжемо рівняння: $x^2 = -x + 2$; $x^2 + x - 2 = 0$;

$x = -2$ або $x = 1$. Тоді

$$S = \int_{-2}^1 ((-x + 2) - x^2) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = 4,5.$$

Відповідь: 4,5.

Об'єм тіла обертання

Якщо тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і додатної функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і прямими $x = a$ і $x = b$, то

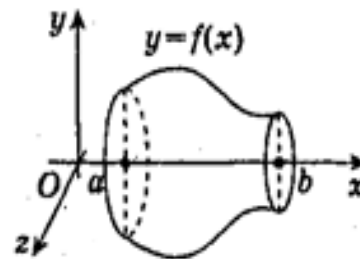


Рис. 75

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \text{ де } V \text{ — об'єм тіла обертання.}$$

Приклад. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ і прямими $x = 0$ і

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) \, dx = \end{aligned}$$

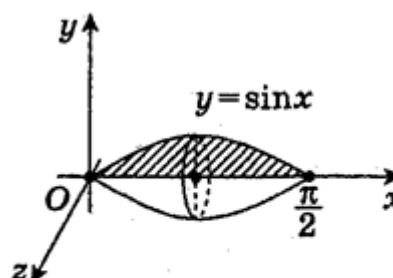


Рис. 76

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \frac{\pi}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Відповідь: $\frac{\pi^2}{4}$.

Розділ 8. Комбінаторика, метод математичної індукції, елементи теорії ймовірностей і статистики

Розділ математики, в якому вивчаються методи розв'язування комбінаторних задач, називається комбінаторикою.

8.1. Елементи комбінаторики і метод математичної індукції

Перестановки

Будь-яка упорядкована множина, що складається з n елементів, називається *перестановкою* з n елементів.

Число перестановок з n елементів (позначається P_n) дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n , тобто $n!$ (читається: ен факторіал)

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n = n!$$

За визначенням $1! = 1$.

Таблиця факторіалів чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Розміщення

Будь-яка впорядкована підмножина з m елементів даної множини, що містить n елементів, де $m \leq n$, називається *розміщенням* з n елементів по m елементів.

Число розміщень з n елементів по m позначається A_n^m .

Число розміщень з n елементів по m дорівнює добутку m послідовних натуральних чисел, найбільше з яких n :

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-m+1), \text{ або } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Якщо $n = m$, $A_n^m = P_n$.

Комбінації

Будь-яка підмножина з m елементів даної множини, що містить n елементів, називається *комбінацією* з n елементів по m елементів, де $m \leq n$.

Число комбінацій з n елементів по m позначається C_n^m .

Число комбінацій з n елементів по m ($1 \leq m \leq n$) дорівнює дробу, чисельником якого є добуток m послідовних натуральних чисел, найбільше з яких n , а знаменником — добуток m перших послідовних натуральних чисел:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1)m},$$

$$\text{або } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} C_n^0 = 1; C_n^1 = n; C_n^n = 1.$$

Властивості числа комбінацій

$$C_n^m = C_n^{n-m}; C_n^{m+1} = \frac{n-m}{n+1} C_n^m;$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}; C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Трикутник Паскаля

Всі можливі значення C_n^m ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$) можна записати у вигляді трикутної таблиці. Така таблиця називається трикутником Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Метод математичної індукції

Для доказу твердження методом математичної індукції треба:

1. Перевірити справедливість цього твердження для $n = 1$.
2. Припустити справедливість цього твердження для $n = k$, де k — довільне натуральне число, із урахуванням цього припущення встановити справедливість для $n = k + 1$.

3. Сформулювати справедливість твердження для будь-якого натурального n .

Біном Ньютона

Рівність $(x + a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \dots + C_n^m x^{n-m} a^m + \dots + C_n^n x^0 a^n +$ називають *біномом Ньютона* або *формулою Ньютона*. Права частина рівності називається біноміальним розкладанням (в суму) або розкладанням бінома, а коефіцієнти $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ — *біноміальними коефіцієнтами*.

Властивості розкладання бінома

1. Число всіх членів розкладання на одиницю більше показника степеня бінома, тобто дорівнює $n + 1$.
2. Сума показників степенів x і a кожного члена розкладання дорівнює показнику степеня бінома, тобто $(n - m) + m = n$.
3. Загальний член розкладання (позначається T_{m+1}) має вигляд:

$$T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} a^m, m = 0, 1, \dots, n.$$

4. Біноміальні коефіцієнти членів розкладання, рівновіддалених від кінців розкладання, рівні між собою:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

5. Сума біноміальних коефіцієнтів всіх членів розкладання дорівнює 2^n :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

6. Сума біноміальних коефіцієнтів членів розкладання, що стоять на непарних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, і дорівнює 2^{n-1} :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

8.2. Початки теорії ймовірностей

Основні поняття

Подія — це явище, про яке можна сказати, що вона відбувається або не відбувається за певних умов.

Подію позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, ...

Будь-яка подія відбувається внаслідок *випробування* (експерименту, досвіду).

Випробування — це умова, в результаті якої відбувається (або не відбувається) подія.

Події поділяють на **випадкові, ймовірні і неможливі**.

Випадковою називається подія, яка може відбутися або не відбутися в результаті певного випробування.

Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Неможливою називається подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися. Неможлива подія позначається символом $\emptyset$.

Теорія ймовірностей — розділ математики, що вивчає закономірності випадкових подій.

Попарно несумісні події — це події, кожні дві з яких не можуть відбутися одночасно.

Рівноможливі події — події, кожна з яких не має жодних переваг з'явитися частіше за інших при проведенні багаторазових випробувань, що проводяться в однакових умовах.

Повною групою подій називається множина таких подій, коли в результаті кожного випробування обов'язково має статися хоча б одна з них.

Якщо події мають властивості: 1) утворюють повну групу подій; 2) несумісні; 3) Рівноможливі, то такі події утворюють множину, яка називається *простором елементарних подій*.

Класичне визначення ймовірності

Імовірністю випадкової події називається відношення кількості елементарних подій m , які сприяють цій події, до кількості всіх однаково можливих n несумісних подій, які утворюють повну групу під час певного випробування

і позначається $P(A)$, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m — число подій, що сприяють події A ;

n — загальна кількість однаково можливих і несумісних подій, які утворюють повну групу ($0 \leq m \leq n$).

Ймовірність можливої події дорівнює 1, ймовірність неможливої події дорівнює 0, а ймовірність $P(A)$ випадкової події A задовольняє умові $0 < P(A) < 1$.

Наприклад, ймовірність того, що при киданні двох монет випаде два герба, дорівнює $\frac{1}{4}$, так як простір елементарних подій:

A_1 — випали два герба, A_2 — випали герб і число, A_3 — випали число і герб, A_4 — випали два числа, а заданій події сприяє тільки одна подія — A_1 .

Статистичне визначення ймовірності

Нехай n — кількість всіх випробувань в окремій серії випробувань, а m — кількість тих випробувань, в яких відбувається подія A .

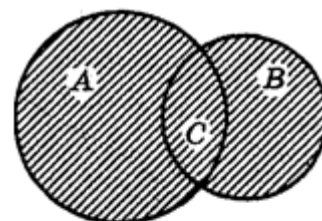
Статистичною ймовірністю події A називається границя, до якої прямує статистична частота $\frac{m}{n}$ події A при необмеженому збільшенні числа всіх випробувань; тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Операції над подіями

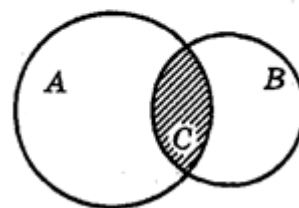
Сумою двох подій A і B (рис. 77) називається подія C , що полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події A , або події B , або обох подій A і B одночасно (позначається $C = A + B$ або $C = A \cup B$)

Подія $\bar{A}$ називається протилежною події A , якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.



$$C = A + B$$

Рис. 77



$$C = AB$$

Рис. 78

Добутком двох подій A і B (рис. 78) називається подія C , яка полягає в одночасному здійсненні обох подій A і B під час одиничного випробування (позначається

$$C = A \cdot B \text{ або } C = A \cap B).$$

Теорема про ймовірність суми подій

Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Якщо $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Наприклад, якщо мисливець стріляє по мішені, розділеної на дві частини, і ймовірність потрапляння в першу частину дорівнює 0,45, а в другу — 0,35, то ймовірність потрапляння в мішень буде дорівнювати $0,45 + 0,35 = 0,8$.

З теореми випливають наслідки.

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які утворюють повну групу і попарно несумісні, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема про ймовірність добутку подій

Дві події називаються *незалежними*, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбулася друга подія чи ні.

Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Наприклад, якщо два мисливці одночасно і незалежно один від одного стріляють по мішені, а ймовірність попадання в мішень відповідно рівні 0,7 і 0,8, то ймовірність того, що обидва мисливці потраплять в ціль, дорівнює $0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

Якщо події $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ незалежні, то ймовірність того, що станеться принаймні одна з них C , може бути виражена через ймовірність цих подій формулою $P(C) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n))$.

Незалежні випробування. Схема Бернуллі

Взаємно незалежними називаються такі випробування, в яких ймовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати мають або будуть мати інші випробування.

Багато задач в теорії ймовірностей зводяться до такої схеми, яка називається схемою Бернуллі: відбувається n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може статися або не статися. Ймовірність того, що випадкова подія A в кожному випробуванні відбувається однаково дорівнює p , а ймовірність того, що не відбувається, — $q = 1 - p$. Потрібно знайти ймовірність $P_{m,n}$ того, що подія A настане m разів на цих n випробуваннях. Шукану ймовірність можна обчислити за **формулою Бернуллі**:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Закон великих чисел

Теорема Бернуллі. Якщо в ряді випробувань ймовірність деякої події залишається для кожного випробування постійною і дорівнює p , то при досить великій кількості випробувань практично достовірно, що частота $\frac{m}{n}$ появи події відрізняється від її ймовірності менше, ніж як завгодно мале число $\varepsilon > 0$.

8.3. Елементи статистики

Поняття про статистику

Статистика — наука, яка збирає, обробляє і вивчає різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами, подіями.

Математична статистика — розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Статистичне спостереження — це спланований, науково організований збір масових даних про соціально-економічні явища і процеси.

Найбільш поширене серед різновидів статистичних спостережень *вибіркове спостереження*. У процесі вибіркового спостереження вивчається лише частина сукупності, відібрана спеціальним методом, який називається *вибіркою*. Всю сукупність, з якої роблять вибірку, називають *генеральною сукупністю*. Число об'єктів генеральної сукупності і вибірки відповідно називають *об'ємом генеральної сукупності і обсягом вибірки*.

Центральні тенденції вибірки

Вибірка характеризується *центральними тенденціями*: *середнім значенням, модою і медіаною*.

Середнім значенням вибірки називається середнє арифметичне всіх її значень:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ або } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Σ — знак суми — «сигма» велика.

Мода вибірки — це її значення, яке трапляється найчастіше (позначається M_0).

Медіана вибірки — це значення змінюваної ознаки, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень більша від медіани, а друга — менша (позначається M_e).

Наприклад, якщо дана вибірка 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8, то мода вибірки $M_0 = 6$, так як число 6 зустрічається найчастіше; середнє значення вибірки

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8}{10} = \frac{53}{10} = 5,3;$$

медіана даної вибірки $M_e = 6$, так як вибірка має парне число значень і її медіана дорівнює півсумі її середніх значень: $M_e = \frac{6+6}{2} = 6$.

Середні значення

Статистика оперує такими **середніми значеннями**: *середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє геометричне*.

Відхиленням значення x_1 від середнього значення $\bar{x}$ називається різниця $x_1 - \bar{x}$.

У статистиці користуються показником — *середнім квадратичним відхиленням*, яке знаходять так: усі відхилення підносять до квадрату; знаходять середнє арифметичне цих квадратів; із знайденого середнього арифметичного добувають квадратний корінь.

Середнє квадратичне відхилення позначають грецькою буквою σ («сигма» мала):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

У статистиці σ^2 називають **дисперсією**.

Приклад.

Знайдемо середнє квадратичне відхилення значень вибірки: 5, 8, 10, 12, 17, 20.

Результати представимо у вигляді таблиці

Функція	Значення					
	5	8	10	12	17	20
Сума $\sum_{i=1}^6 x_i$	72					
Середнє арифметичне $\bar{x}$	$\bar{x} = \frac{72}{6} = 12$					

Відхилення $x_1 - \bar{x}$	-7	-4	-2	0	5	8
Квадрат відхилення $(x_1 - \bar{x})^2$	49	16	4	0	25	64
Сума квадратів відхилення $\sum_{i=1}^6 (x_1 - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^6 (x_1 - \bar{x})^2 = 158$					
Квадратичне відхилення σ	$\sigma = \sqrt{\frac{158}{6}} \approx 5,13$					

Середнє геометричне n додатніх чисел $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ визначається за формулою $m = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

Наприклад, середнім геометричним чисел 5, 8, 10, 12 є число

$$\sqrt[4]{5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt[4]{4800} \approx 8,3.$$

Деякі знаки, позначення та скорочення

$\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ - множина цілих чисел

$\mathbb{Q}$ - множина раціональних чисел

$\mathbb{R}$ - множина дійсних чисел

$\emptyset$ - порожня множина

$\in$ -належить ($a \in M$ - елемент a належить множині M ; $a \notin M$ - елемент a не належить множині M)

$\cup$ - об'єднання множин ($A \cup B$ – об'єднання множин A і B)

$\cap$ - перетин множин ($A \cap B$ - перетин множин A і B)

$\subset$ - підмножина (включення) ($B \subset A$ - множина B є підмножиною A)

$\setminus$ - різниця ($A \setminus B$ - різниця множин A і B)

НСД (a, b) - найбільший спільний дільник чисел a і b

НСК (a, b) - найменше спільне кратне чисел a і b

$|a|$ - абсолютна величина (модуль) числа a

$[a]$ - ціла частина числа a ;

$\{a\}$ - дробова частина числа a

$\sqrt{a}$ - арифметичний квадратний корінь з числа a

$\sqrt[n]{a}$ - арифметичний корінь n -го степеня з числа a

$\log_a b$ - логарифм числа b за основою a

$\lg b$ - десятковий логарифм числа b

$\ln b$ - натуральний логарифм числа b

$\pi = 3,1415926 \dots$ - Число π - відношення довжини кола до діаметра

$e = 2,7182818 \dots$ - число e - основа натурального логарифма

$f(x_0)$ - значення функції f в точці x_0

$\sin x$ - функція синус x ; $\cos x$ - функція косинус x

$\operatorname{tg} x$ - функція тангенс x ; $\operatorname{ctg} x$; - функція котангенс x :

$\arcsin x$: - функція арксинус x ; $\arccos x$ - функція арккосинус x

$\operatorname{arctg} x$ - функція арктангенс x ; $\operatorname{arcctg} x$ - функція арккотангенс x

$[a; b]$ - замкнутий проміжок (відрізок) з початком a і кінцем b

$(a; b)$ - відкритий проміжок (інтервал) з початком a і кінцем b

$[a; b)$ і $(a; b]$ - напівзамкнуті числові проміжки з початком a і кінцем b

$(-\infty; +\infty)$ - числова пряма; $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ - напівзамкнуті

числові промені; $(a; +\infty)$; $(-\infty; b)$ - відкриті числові промені

$a < x < b$ - подвійна нерівність (x більше a й менше b)

$a \leq x < b$ - подвійна нерівність (x не менше a і менше b)

$a < x \leq b$ - подвійна нерівність (x більше a й не більше b)

$a \leq x \leq b$ - подвійна нерівність (x не менше a й не більше b)

$(a; b)$ - впорядкована пара чисел

$(a; b; c)$ - впорядкована трійка чисел

Ox - вісь абсцис; Oy - вісь ординат; Oz - вісь аплікату

$M(x)$ - точка M з координатою x

$M(x; y)$ - точка M з координатами x і y

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ - число b - границя функції $f(x)$ за умови, що x прямує до a

Δx - приріст аргументу; $\Delta y, \Delta f(x)$ - приріст функції

$f'(x)$ - похідна функції $f(x)$

$f'(x_0)$ - значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0

$F(x)$ - первісна функція для функції $f(x)$

$\int f(x) dx$ - невизначений інтеграл функції $f(x)$

$\int_a^b f(x) dx$ - визначений інтеграл функції $f(x)$ від a до b

$n!$ - факторіал ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

P_n - число перестановок з n елементів

A_n^m - число розміщень з n елементів по m

C_n^m - число комбінацій з n елементів по m

A, B, C - випадкові події

$P(A)$ - ймовірність випадкової події A

$A + B$ - сума подій; $A \cdot B$ - добуток подій

$\bar{A}$ - подія, протилежна події A

Список літератури

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ I-II р. а.)– К.: Вища школа, 2001.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р. а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001.
3. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класу загальноосвітніх навчальних закладів – К.: Освіта, 2005.
4. Бруда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика (підручник для початкових закладів освіти гуманітарного профілю), 10-11 кл. – К.: Освіта, 2001.
5. Бурда М.І. Математика, 10-11 кл. – К.: Освіта, 2005.
6. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра і початки аналізу. За ред. Слєпкань З.І. 11кл. – Х.: Гімназія, 2005.
7. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003.
8. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Х.: Гімназія, 2010 – 416с.
9. Рєва Т.Г. Завдання для поточного оцінювання. Алгебра. Книга для вчителя, 11 кл. – К.: Країна мрій, 2005.
10. Рєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра і початки аналізу в таблицях, 10-11 кл. – К.: Країна мрій, 2003.
11. Слєпкань З.І., Грохольська А.В. Збірник задач з алгебри і початків аналізу, 10-11 кл. – К.: Підручники і посібники, 2003.
12. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу (підручник), 10-11 кл. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001.
2. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003.
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ I-II р. а.) – К.: Вища школа, 2001.
4. Бруда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика (підручник для начальних закладів освіти гуманітарного профілю), 10-11 кл. – К.: Освіта, 2001.
5. Бурда М.І. Математика, 10-11 кл. – К.: Освіта, 2005.
6. Шкіль М.І., Склепань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу (підручник), 10-11 кл. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002.
7. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класу загальноосвітніх навчальних закладів – К.: Освіта, 2005.
8. Немін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Х.: Гімназія, 2010 – 416с.
9. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра і початки аналізу. За ред. Слєпкань З.І. 11кл. – Х.: Гімназія, 2005.
10. Слєпкань З.І., Грохольська А.В. Збірник задач з алгебри і початків аналізу, 10-11 кл. – К.: Підручники і посібники, 2003.
11. Роєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра і початки аналізу в таблицях, 10-11 кл. – К.: Країна мрій, 2003.
12. Роєва Т.Г. Завдання для поточного оцінювання. Алгебра. Книга для вчителя, 11 кл. – К.: Країна мрій, 2005.